Mathematik, Teil 1

Hinweise:

- Die Prüfungszeit beträgt 90 Minuten.
- Ausser den Schreib-, Zeichen- und Konstruktionsutensilien sind **keine** Hilfsmittel erlaubt.
- Alle Resultate müssen mit einem vollständigen, eindeutig nachvollziehbaren Lösungsweg belegt sein.
- Die Verwendung von Blei- und Farbstiften ist nur zur Erstellung von Skizzen, Diagrammen und Konstruktionen erlaubt.
- Ungültige Lösungsansätze und Resultate sind unmissverständlich durchzustreichen.
- Jede vollständig richtig gelöste Aufgabe wird mit 2 Punkten bewertet.
- Für 20 der 30 möglichen Punkte wird die Note 6 erteilt.

Wenn nichts anderes angegeben, gilt: Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen (**G = R**)

1. Berechnen Sie:

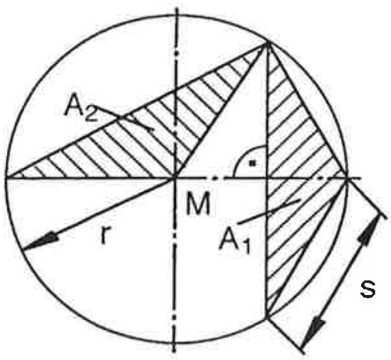
   a.) $(a^3b + a^3c + a^2b + a^2c + b^2 + bc) : (b+c)$

   b.) $\frac{1}{a}\sqrt[n]{a^{n-1}\left(\sqrt[n]{a^{n-1}\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}\right)}\right)}$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge mit Diskussion der Sonderfälle.

$$2ax - a + 8 = 5bx$$

3.



Berechnen Sie die Fläche A_2 in $[m^2]$, wenn die Fläche $A_1 = 147\ m^2$ und $s = 0.7r$ betragen.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos(x)$ mit dem Definitionsbereich

$$\mathbf{D} = \left\{ x \in \mathbf{R} \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{2}{3}\pi \right\}$$

   a.) Skizzieren Sie diese Funktion.

   b.) Für welchen Winkel x_1 wird der maximale Funktionswert erreicht?

   c.) Wie gross ist der minimale Funktionswert?

5. a.) Konstruieren Sie ein Viereck und erstellen Sie einen Konstruktionsbericht:
   $c = 6$ cm, $b = 6.5$ cm, Winkel CBD = 30°, 4 cm $\le d <$ 6 cm, 5 cm $< e \le$ 7 cm.

   b.) Markieren Sie den Bereich für den Punkt A.

bitte wenden!

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

$$\left(\frac{x+8}{x-7}\right)^2 + \frac{x+8}{x-7} = 20$$

7. Berechnen Sie:

$$\lg 40 + \lg\left(\frac{100}{4}\right) - \lg 10'000 \qquad \mid \lg \text{ bedeutet } \log_{10}$$

8. In einem Parallelogramm messen die Seiten $a = 8$ cm, $b = 5\sqrt{3}$ cm und der Winkel zwischen den beiden Seiten $\beta = 30°$. Berechnen Sie die kürzere der beiden Diagonalen.

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \sqrt{\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\sqrt{1 - \frac{7}{x^2}}\right]} = 0$$

10. Spiegeln Sie die Parabel $y = 2x^2 + 4x - 1$ am Punkt P(1/1):
Skizzieren Sie die beiden Grafen, und formulieren Sie die Funktionsgleichung der gespiegelten Parabel.

11. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a.) $\dfrac{\sin(3\pi - z)\sin(5\pi + z)}{\sin(\pi + z)\sin(-\pi - z)}$ b.) $\dfrac{\sin(\pi - x)\tan(\pi + x)\cos(\pi - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)\cos(\frac{3}{2}\pi - x)}$

12. Eine Gerade ist durch die Punkte P_1 und P_2 bestimmt. Berechnen Sie die Geradengleichung und den Schnittpunkt mit der Abszisse (x-Achse).

$$P_1\left(0 / -3\sqrt{3}\right), \quad P_2\left(5 / 2\sqrt{3}\right)$$

13. Eine dreistellige Zahl wird um 36 kleiner, wenn man die Zehner- und die Einerziffer vertauscht. Vertauscht man stattdessen die Hunderter- und die Zehnerziffer, so erhält man eine um 90 grössere Zahl. Das 3fache der Quersumme der gesuchten Zahl ist genau 8mal grösser als die Hunderterziffer. Bestimmen Sie die Zahl mit einem linearen Gleichungssystem.

14. Stellen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung als Punktmenge in der Ebene dar, die durch das x-y-Koordinatensystem aufgespannt wird.

$$6x - 3y > 3 \qquad \mid \; x \in R \text{ und } y \in R$$

15. Berechnen Sie die Terme, wenn $\mathbf{G} = \mathbf{C}$ ($i^2 = -1$):

a.) $(3+4i)(3-4i)2i$

b.) $\dfrac{63+16i}{4+3i}$

bitte wenden!

Lösungen

	Pte
1. a. $(a^3b+a^3c+a^2b+a^2c+b^2+bc):(b+c) = \underline{\underline{a^3+a^2+b}}$	1

$$
\begin{array}{l}
(a^3b+a^3c+a^2b+a^2c+b^2+bc):(b+c) = a^3+a^2+b \\
\underline{-(a^3b+a^3c)} \\
\quad a^2b+a^2c+b^2+bc \\
\quad \underline{-(a^2b+a^2c)} \\
\qquad b^2+bc \\
\qquad \underline{-(b^2+bc)} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

b.

$$\frac{1}{a}\sqrt[n]{a^{n-1}\left(\sqrt[n]{a^{n-1}\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}\right)}\right)} = a^{-1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n-1}{n^3}}$$

$$= a^{\frac{-n^3+n^3-n^2+n^2-n+n-1}{n^3}}$$

$$= \underline{\underline{a^{-\frac{1}{n^3}}}} = \frac{1}{\sqrt[n^3]{a}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}}}}}$$

Pte: 1

2.

$$2ax-a+8 = 5bx$$

$$2ax-5bx = a-8$$

$$\underline{\underline{x = \frac{a-8}{2a-5b}}}\ ,\ \text{WENN } 2a-5b \neq 0 \quad \text{1. FALL}$$

Pte: 1

WENN $\underline{2a-5b=0 \wedge a=8} \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{L}=\mathbb{R}}}$ 2. FALL — 0.5

$\underline{2a-5b=0 \wedge a \neq 8} \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{L}=\{\ \}}}$ 3. FALL — 0.5

3.

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \qquad (0.5)$$

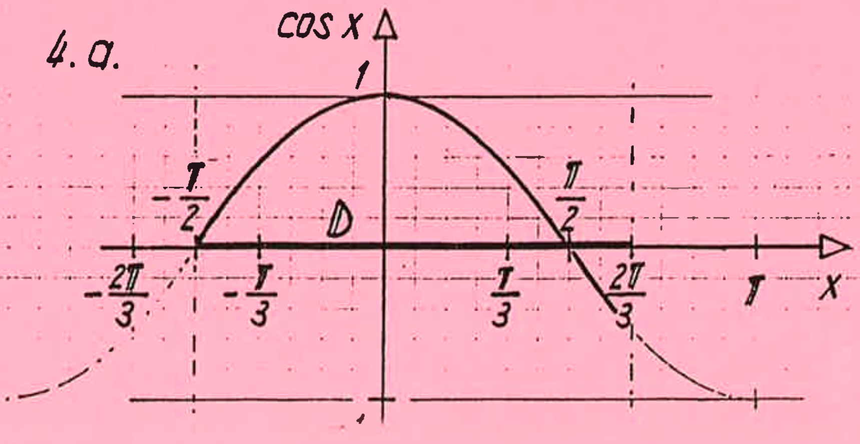
$$A_1 : A_2 = s^2 : r^2 \qquad |\ s = 0.7r \qquad (1)$$

$$\therefore \quad A_2 = A_1 \frac{1}{0.49} = \frac{147}{0.49}\ [m^2]$$

$$\underline{\underline{A_2 = 300\ m^2}} \qquad 2$$

---

4. a.



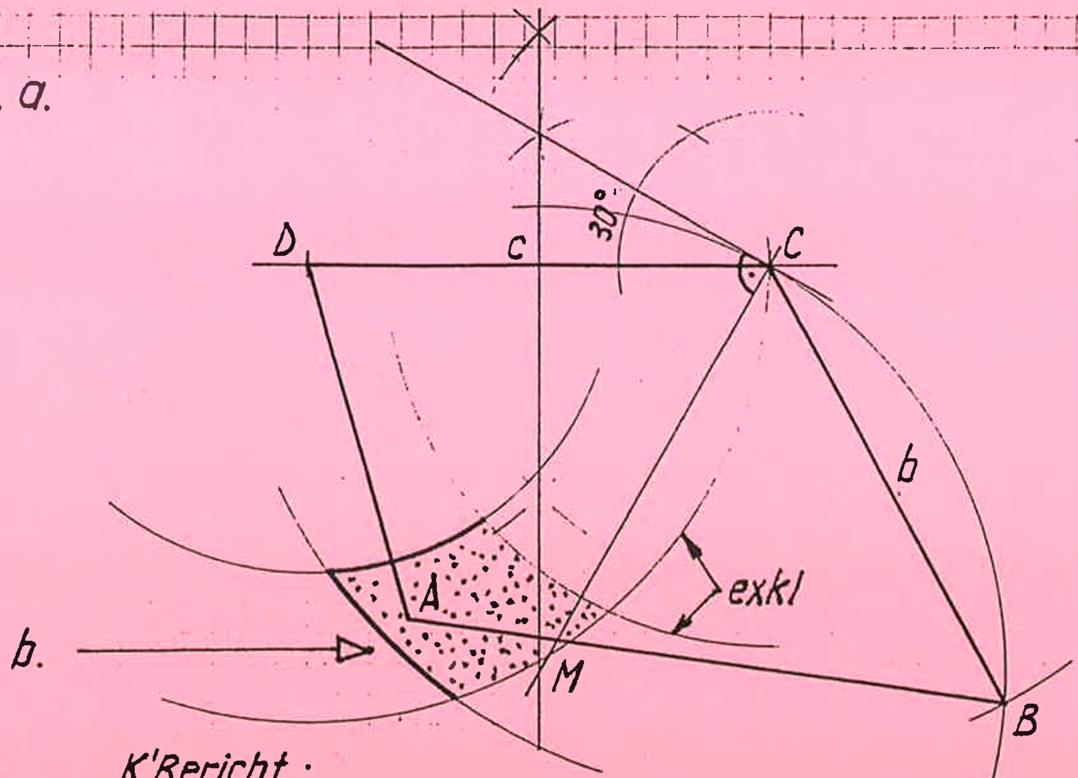
b. $\underline{\underline{x_1 = 0}}\ /\ \underline{\cos x_1 = 1}$

c. $\underline{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \underline{\underline{-0.5}}$

a.	1
b.	0.5
c.	0.5

Pte

5. a. 1



b. 1

K'Bericht:

1. $\overline{CD} = c = 6\,cm$
2. $\odot(M;\overline{MC}) \cap \odot(C; b = 6.5\,cm) = \{B; B' \notin \mathbb{L}\}$; s-t-∢Satz (c; 30°)
3. $\left.\begin{array}{l}\odot(D;\ 4cm \le d < 6cm) \\ \odot(C;\ 5cm < e \le 7cm)\end{array}\right]$ Bereich für/von A

---

6. $\left(\frac{x+8}{x-7}\right)^2 + \frac{x+8}{x-7} = 20 \quad \Big|\ \underline{\text{SUBST}}:\ s = \frac{x+8}{x-7}$

$$s^2 + s - 20 = 0$$

$$\therefore \quad s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1(-20)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

$$\underline{s_{1,2} = -5\,;\,4}$$ (1)

$\xrightarrow{s_{1,2}}$

$$sx - 7s = x + 8$$
$$x(s-1) = 7s + 8$$
$$\underline{x = \frac{7s+8}{s-1}}$$

$\xrightarrow{s_1 = -5}$ $\underline{\underline{x_1}} = \frac{-35+8}{-5-1} = \frac{-27}{-6} = \underline{\underline{4.5}}$

$\xrightarrow{s_2 = 4}$ $\underline{\underline{x_2}} = \frac{28+8}{4-1} = \frac{36}{3} = \underline{\underline{12}}$

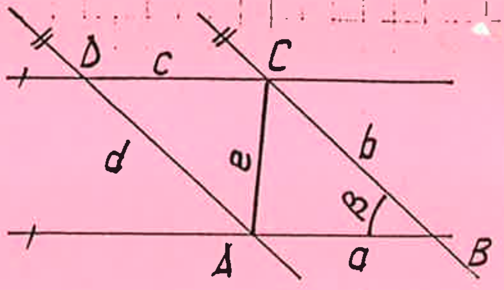
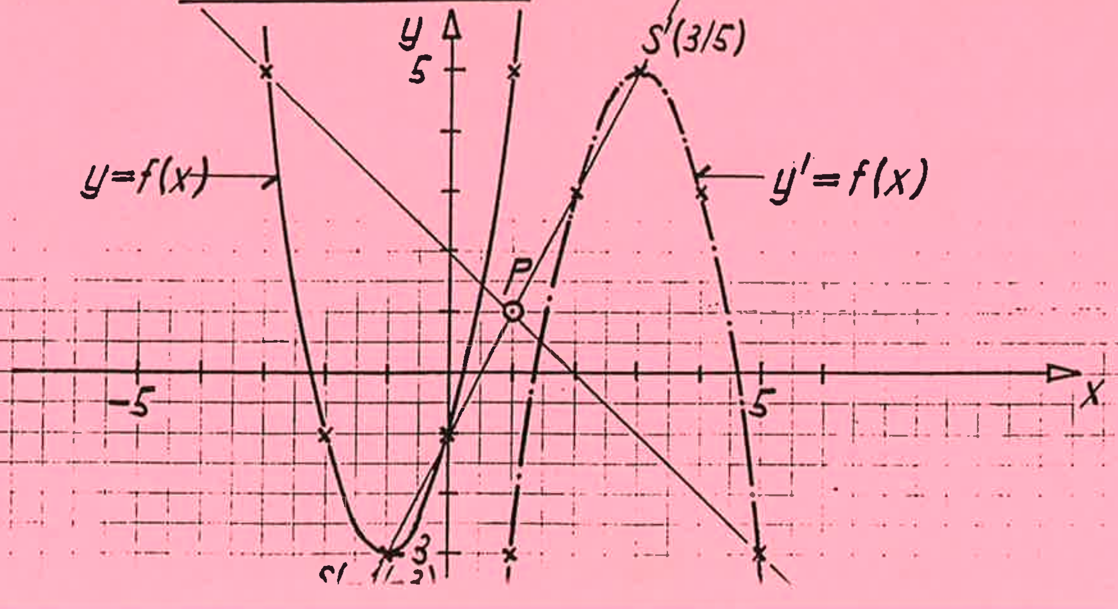
$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{x \mid 4.5; 12\}}}$ 2

---

7. $\lg 40 + \lg\left(\frac{100}{4}\right) - \lg 10'000 = \lg\left(40 \cdot \frac{100}{4}\right) - \lg 10^4$ (0.5)

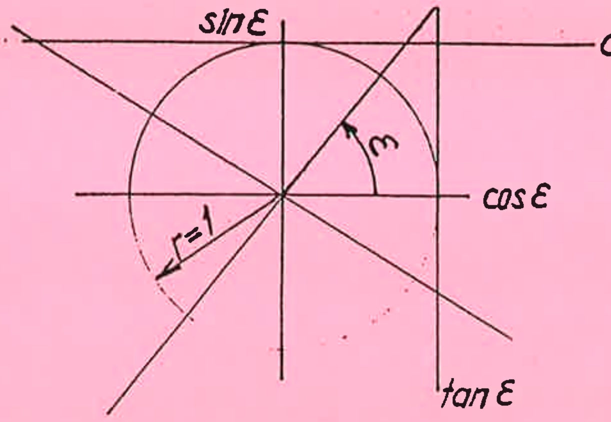
$$= 3 - 4$$

$$= \underline{\underline{-1}}$$ 2

	Pte
8.  $e^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos 30°$	(1)
$= 8^2+(5\cdot\sqrt{3})^2-8\cdot 5\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ [cm^2]$	
$= 64+75-120\ [cm^2]$	
$e^2 = 19\ cm^2$	(1.5)
$\therefore\ \underline{e = \sqrt{19}\ cm}$	2
9. $\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\sqrt{\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}\right]} = 0$ $-\sqrt{\ } = \frac{1}{x}-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}-\frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{7}{x^2}} = \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{4}$ $-\sqrt{\ } = \frac{1}{x}-1$ $1-\frac{7}{x^2} = \frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1$ $0 = \frac{8}{x^2}-\frac{2}{x}$ $\frac{1}{x} = \frac{4}{x^2}$ $x^2-4x = 0$ $x(x-4) = 0$ $\therefore\ x_{1,2} = 0\notin\mathbb{L}\ ;\ 4\in\mathbb{L}$ $\underline{\mathbb{L} = \{x\mid 4\}}$; CHECK: $0 \equiv 0$ ☺ $1-\frac{7}{x^2}>0$ $x^2>7$ $\underline{x > \lvert\pm\sqrt{7}\rvert}$ $\underline{D = \{\mathbb{R}\mid > \lvert\pm\sqrt{7}\rvert\}}$	(1) 2
10. $x \longrightarrow \underline{y} = 2x^2+4x-1 = \underline{2(x+1)^2-3} \longrightarrow \underline{S(-1/-3)}$	(0.5)
$S \xrightarrow{P(1/1)} \underline{S'(3/5)}$	(0.5)
$\underline{S'}: x \longrightarrow \underline{y' = -2(x-3)^2+5}$	1
	1

	Pte

11.



AUS EINHEITS⊙ / SYMMETRIEEIGENSCHAFTEN

⟶ UMFORMUNGEN IN a. UND b.:

a. $\dfrac{\sin(3\pi - z)\cdot\sin(5\pi + z)}{\sin(\pi + z)\cdot\sin(-\pi - z)} = \dfrac{\sin z\cdot(-1)\cdot\sin z}{(-1)\sin z\cdot\sin z} = \underline{\underline{1}}$ 1

b. $\dfrac{\sin(\pi - x)\cdot\tan(\pi + x)\cdot\cos(\pi - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)\cdot\cos(\frac{3}{2}\pi - x)} = \dfrac{\sin x\cdot\tan x\cdot(-1)\cos x}{\cos x\cdot(-1)\sin x} = \underline{\underline{\tan x}}$ 1

---

12. $x \longrightarrow y = mx + n$

$P_1(0/-3\sqrt{3}) \rightarrow \underline{n = -3\sqrt{3}}$

$P_2(5/2\sqrt{3});n \rightarrow 2\sqrt{3} = m\cdot 5 + (-3\sqrt{3})$

$\therefore\ \underline{m = \sqrt{3}}$

$m;n \rightarrow \underline{\underline{y = f(x) = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}}} = \underline{\sqrt{3}(x-3)}$ 1

$\underline{y = 0 = \sqrt{3}(x-3)}$: ABSZISSENSCHNITTPUNKT $S_x(x_0/0) \longrightarrow$

$\underline{x_0 = 3} \longrightarrow \underline{\underline{S_x(3/0)}}$ 1

---

13. $100H + 10Z + E = 100H + 10E + Z + 36$

$9Z - 9E = 36$

$\underline{Z - E = 4}$ 1)

$100H + 10Z + E = 100Z + 10H + E - 90$

$90H - 90Z = -90$

$\underline{H - Z = -1}$ 2)

$3(H + Z + E) = 8H$

$\underline{-5H + 3Z + 3E = 0}$ 3) (1)

1); 2); 3) ⟶ <u>ZAHL</u>: HZE = ... !

<u>1)+2)</u> $H - E = 3$

$\therefore\ \underline{H = E + 3}$ 4)

<u>4) IN 3)</u>

$-5E - 15 + 3Z + 3E = 0$

$\therefore\ Z = \dfrac{2E + 15}{3}$

$\underline{Z = \frac{2}{3}E + 5}$ 5)

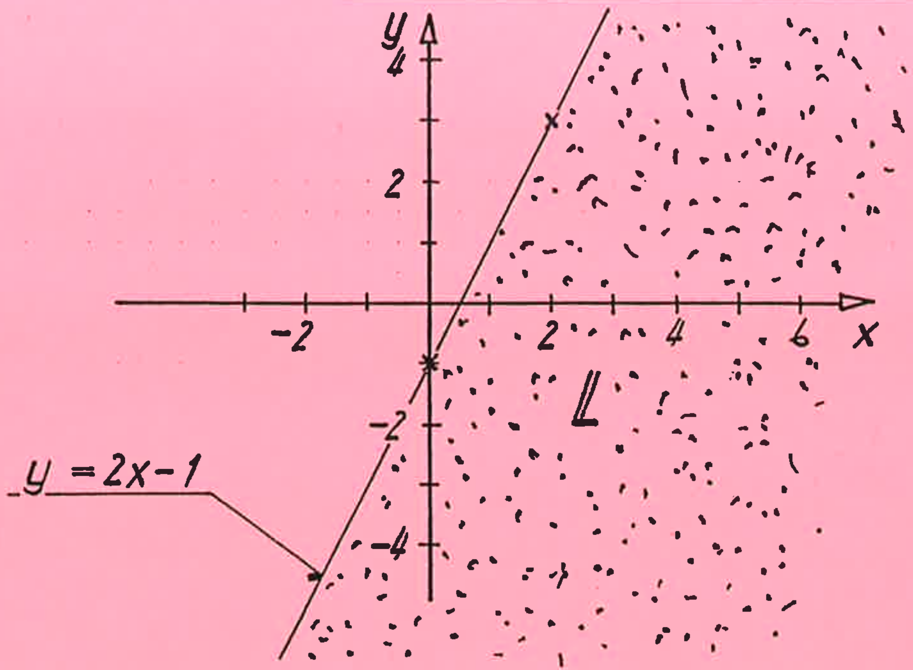
<u>4); 5) IN 2)</u> $E + 3 - \frac{2}{3}E - 5 = -1$

$\therefore\ \frac{1}{3}E = 1$

$\underline{E = 3}$

<u>E IN 4); 5)</u> $\underline{H = 6}$; $\underline{Z = 7}$

<u>HZE</u> ⟶ <u><u>ZAHL: 673</u></u> 2

	Pte
14. $6x - 3y > 3$	
$-3y > -6x + 3$	
$\underline{\underline{y < 2x - 1}}$	(1)
<u>GRENZGERADE</u>: $\underline{y} = f(x) = \underline{2x - 1} \notin \mathbb{L}\ !$	
$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(x/y) \mid x;y \in \mathbb{R} \wedge y < 2x-1\}}}$	
	2
15. a. $(3+4i)(3-4i)2i = 2i(9-16i^2) = 2i \cdot 25 = \underline{\underline{50i}}$	1
b. $\dfrac{63+16i}{4+3i} = \dfrac{(63+16i)(4-3i)}{16-9i^2} = \dfrac{1}{25}(252-189i+64i-48i^2)$	
$= \dfrac{1}{25}(300-125i) = \underline{\underline{12-5i}}$	1