Mathematik, Teil 2

Hinweise:

- Die Prüfungszeit beträgt 150 Minuten.
- Erlaubte Hilsmittel sind: - Taschenrechner,
  - Tabellen- und Formelsammlungen ohne Lösungsbeispiele,
  - Schreib-, Zeichen- und Konstruktionsutensilien.
- Alle Resultate müssen mit einem vollständigen, eindeutig nachvollziehbaren Lösungsweg belegt sein.
- Die Verwendung von Blei- und Farbstiften ist nur zur Erstellung von Skizzen, Diagrammen und Konstruktionen erlaubt.
- Ungültige Lösungsansätze und Resultate sind unmissverständlich durchzustreichen.
- Die Bewertungspunkte für die vollständig richtige Lösung sind bei jeder Aufgabe angegeben.
- Für 18 der 27 möglichen Punkte wird die Note 6 erteilt.

Wenn nichts anderes angegeben, gilt: Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen ($\mathbf{G} = \mathbf{R}$)

1. Ein Stück Blech hat die Form eines Trapezes ABCD mit Diagonalenschnittpunkt E.

   Es ist: $c = 4.00$ dm, $h = 6.00$ dm, $AC = e = 9.00$ dm, Winkel $AED = \varepsilon = 70.0°$
   Vom Trapez sind zu berechnen:

   a.) die Seiten a, b, d auf 1 mm genau.

   b.) die Winkel α und β auf 0.1 ° genau.

   c.) die Fläche auf 1 cm^2 genau.

   3 P

2. Bei einer geraden quadratischen Pyramide ist die Höhe um 5.0 cm kürzer als die Grundkante. Berechnen Sie die Länge der Grundkante auf 1 mm genau, wenn die Seitenkante 11.0 cm beträgt.

   2 P

3. $y = f(x) = \frac{3}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \quad | \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$

   a.) Erstellen Sie eine Wertetabelle für das Intervall $-\frac{5}{6}\pi \le x \le \frac{11}{6}\pi$, und skizzieren Sie den Funktionsgrafen (x / y) in diesem Bereich.

   b.) Beschreiben Sie mit einer Formel die exakte Lage aller Nullstellen dieser Funktion ($\mathbf{D} = \mathbf{R}$).

   3 P

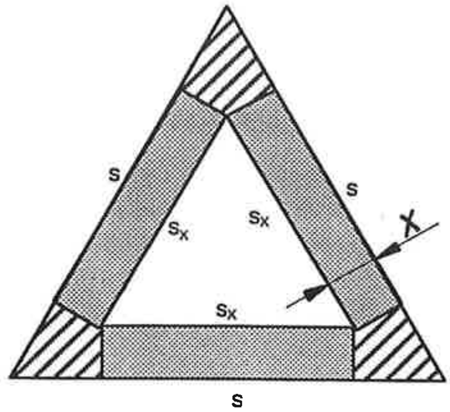
4. Ein 56.0 cm hohes Gefäss hat die Form eines geraden, regulären Dreieck-Prismas. Die Seitenlänge des Leitpolygons misst 20.0 cm. Das Gefäss ist volumetrisch zu 5/7 mit Wasser gefüllt und wird über eine Standflächenseite gekippt, bis Wasser auszufliessen beginnt. Berechnen Sie die Höhe des Wasserspiegels in dieser Lage auf 1 mm genau.

   2 P

bitte wenden!

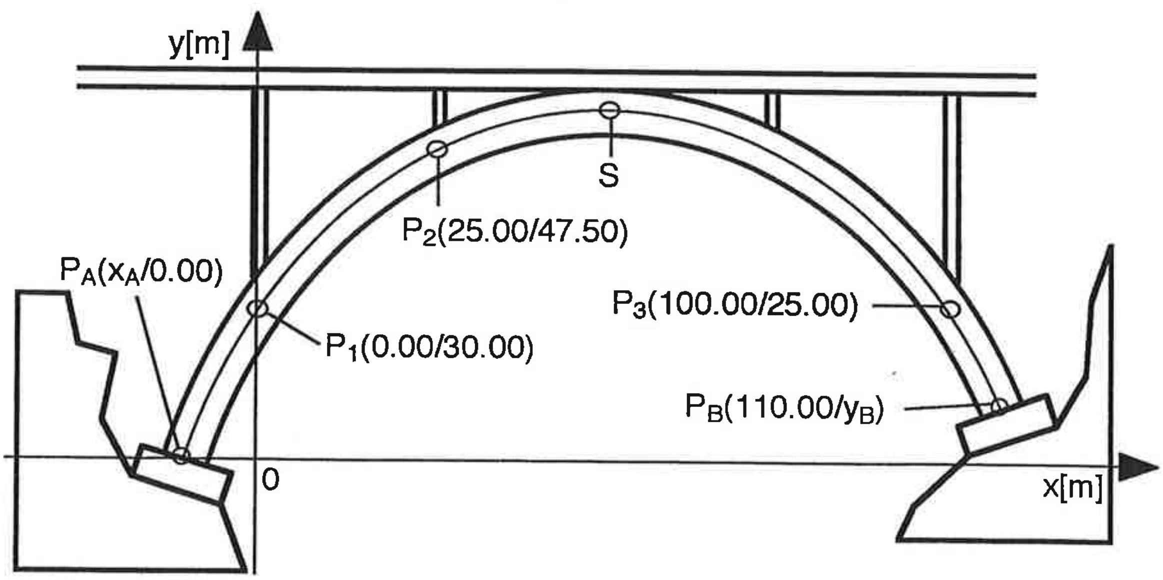
5. Stellen Sie grafisch die Punktemenge dar, deren Koordinatenwerte (x/y) die beiden Bedingungen $y > | 0.5x^2 + 0.5x - 3 |$ und $3y < (x + 0.5)^2$ erfüllen. 3 P

6. Für ein neues Produkt sollen Kartonschachteln auf die folgende Art hergestellt werden:
Aus einem gleichseitigen Kartondreieck mit Seitenlänge s werden zuerst die schraffierten Flächen ausgestanzt. Anschliessend werden die punktierten Rechtecke entlang der Strecken s_x so aufgefaltet, dass die Schachtel die Form eines geraden Prismas mit der Höhe x erhält. Das Füllvolumen V der Kartonschachtel ist offensichtlich eine Funktion von der Höhe x (V=f(x)).



a.) Formulieren Sie die Seitenlänge s_x des Grundflächendreiecks mit s und x.
b.) Entwickeln Sie die Funktionsgleichung V=f(x), wenn die Seitenlänge s = 10 cm misst, und bestimmen Sie den Definitionsbereich.
c.) Berechnen Sie die Funktionswerte V=f(x) für x=0.2, 0.4, ... , 1.8, 2.0 cm, und bestimmen Sie mit Hilfe eines Verlaufsdiagramms (x/V) grafisch diejenige Höhe x, welche das maximale Schachtelvolumen erzeugt. 3 P

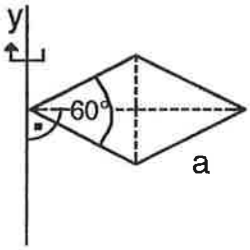
7.



a.) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des parabelförmigen Brückenbogens in der Form $x \rightarrow y = ax^2 + bx + c$.
b.) Berechnen Sie den Scheitelpunkt S (x_s/y_s) des Brückenbogens.
c.) Berechnen Sie die fehlenden Koordinatenangaben der Auflagerpunkte P_A und P_B.

3 P

8.



Bei Rotation der skizzierten Rhombusfläche mit Seitenlänge a um die y-Achse entsteht ein kantiger Ring.

a.) Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des Rings.

b.) Nun wird koaxial zu y ein zylindrisches Loch mit $r = a/2$ durch den Ringkörper gebohrt. Berechnen Sie das entfernte Werkstoffvolumen.

3 P

9. Eine BMA-Klasse besteht aus 18 Schülerinnen und Schülern.

a.) Die Klasse will beim Rektor eine Reklamation anbringen und muss dafür eine Viererdelegation bestimmen. Wieviele Möglichkeiten zur Bildung der Viererdelegation gibt es?

b.) In derselben Klasse sollen vier „Ämtli" neu verteilt werden (Klassenchef, Kassier, ...). Auf wieviele Arten geht das? 2 P

10. Der Überschalljet Concorde fliegt in $h = 20.0$ km über der Erdoberfläche (Kugel mit Radius $r = 6370$ km). Die Resultate sind auf 3 signifikante Ziffern genau anzugeben.

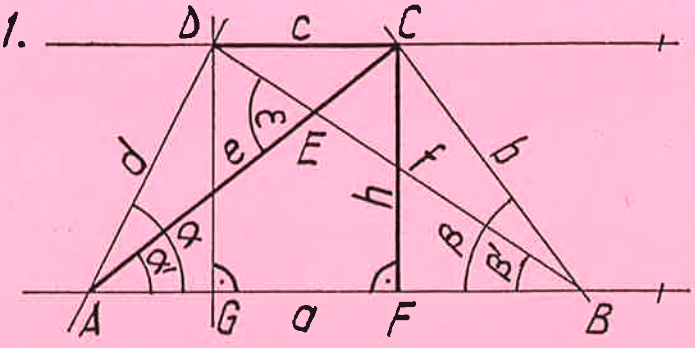
a.) Welche theoretische Sichtweite hat der Pilot?

b.) Wieviele ‰ (Promille) der ganzen Erdoberfläche vermag er zu überblicken?

c.) In welcher Höhe muss eine Raumstation kreisen, wenn von ihr aus 1/6 der Erdoberfläche sichtbar sein soll? 3 P

Lösungen | Pte

1.



$c = 4.00\ dm$
$h = 6.00\ dm$
$e = 9.00\ dm$
$\varepsilon = 70.0°$

a. $\overline{AF} = \sqrt{e^2-h^2} = \sqrt{9^2-6^2}\ [\sqrt{dm^2}] = \underline{6.708\ dm}$

$\sin\alpha' = \frac{h}{e} = \frac{6}{9}\ [\frac{dm}{dm}] = \frac{2}{3}\ \therefore\ \underline{\alpha' = 41.810°}$

$\beta' = 180° - (180° - \varepsilon + \alpha') = 70 - 41.810\ [°]$

$\underline{\beta' = 28.190°}$

$\underline{\overline{BG}} = \frac{h}{\tan\beta'} = \frac{6}{\tan 28.190°}\ [dm] = \underline{11.195\ dm}$

$\underline{\underline{a}} = AF + BG - c = 6.708 + 11.195 - 4\ [dm] \approx \underline{\underline{13.90\ dm}}$

$\underline{\underline{b}} = \sqrt{(\overline{BG}-c)^2+h^2} = \sqrt{(11.195-4)^2+6^2}\ [\sqrt{dm^2}] = \underline{\underline{9.37\ dm}}$

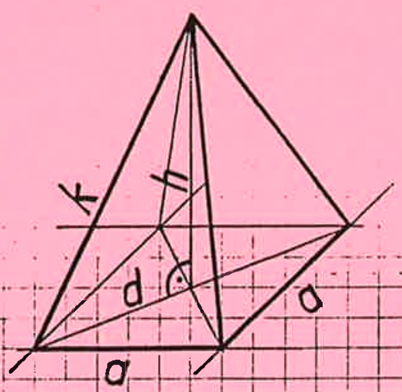
$\underline{\underline{d}} = \sqrt{(\overline{AF}-c)^2+h^2} = \sqrt{(6.708-4)^2+6^2}\ [\sqrt{dm^2}] = \underline{\underline{6.58\ dm}}$ 1.5

b. $\tan\alpha = \frac{h}{\overline{AF}-c} = \frac{6}{6.708-4}\ [\frac{dm}{dm}]\ \therefore\ \underline{\underline{\alpha = 65.7°}}$

$\tan\beta = \frac{h}{\overline{BG}-c} = \frac{6}{11.195-4}\ [\frac{dm}{dm}]\ \therefore\ \underline{\underline{\beta = 39.8°}}$ 1

c. $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(a+c)h = \frac{1}{2}(13.90+4)\cdot 6\ [dm^2] = \underline{\underline{53.70\ dm^2}}$ 0.5

2.



$k = 11.0\ cm$
$h = a - b\ ;\ b = 5.0\ cm$

$k^2 = \frac{1}{4}d^2 + h^2 \quad \Big|\ d = \sqrt{2}\,a\ ;\ h = a-b$

$= \frac{1}{4}\cdot 2a^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$0 = \frac{3}{2}a^2 - 2ab + b^2 - k^2$

$\underline{0 = 3a^2 - 4ab - 2(k^2-b^2)}$ (1)

$\therefore\ a_{1,2} = \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 + 4\cdot 3\cdot 2(k^2-b^2)}}{2\cdot 3}$

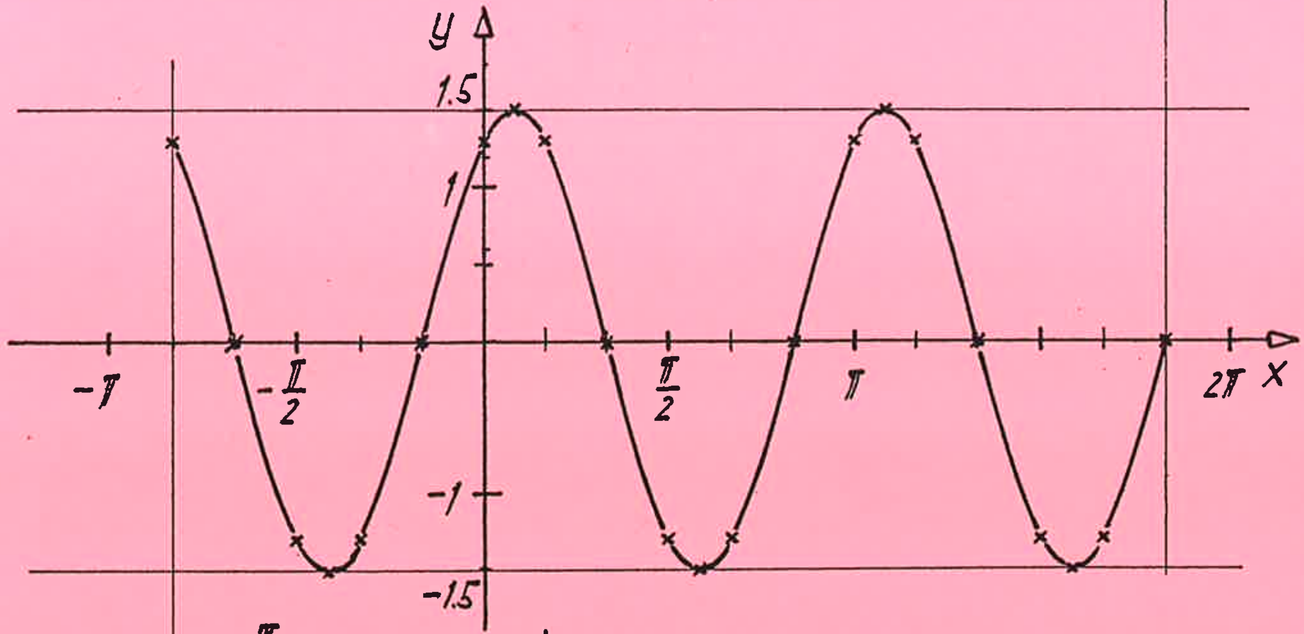
$= \frac{4\cdot 5 \pm \sqrt{16\cdot 25 + 24(121-25)}}{6}\ [cm] = \frac{20 \pm 52}{6}\ cm$

$\underline{a_{1,2} = 12.0\ cm\ ;\ -5.3\ cm \notin \mathbb{L}}$ 2

3.a. x	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-4\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{6}$	$\frac{-2\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
y	1.30	0	-1.30	-1.30	0	1.30	1.30	0	-1.30	-1.30	0	1.30	1.30	0	-1.30	-1.30	0

Pte

$$y = f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \Big| \; D = \mathbb{R}\,; \; W = \{y \mid -1.5 \leq y \leq 1.5\}$$



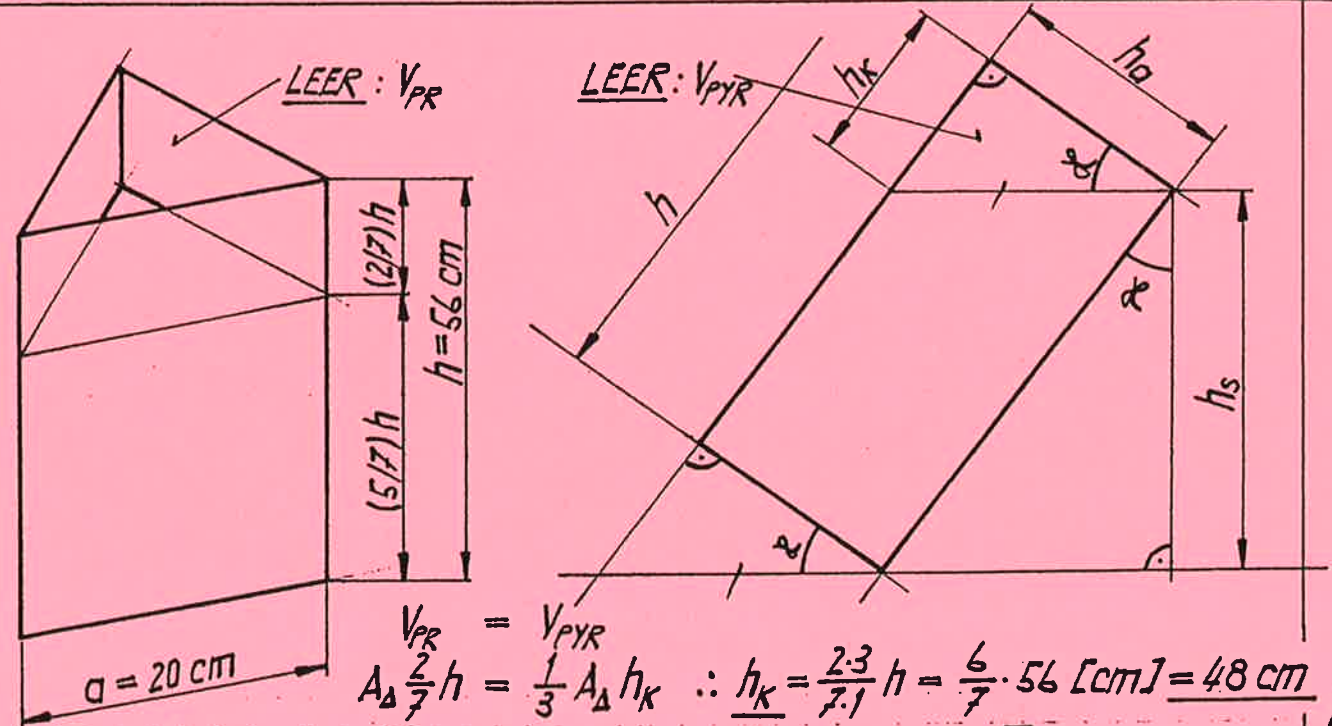
1.5

b. $$2x_0 + \frac{\pi}{3} = k\pi \quad \Big| \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \quad x_0 = k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}(3k-1)$$

1.5

4.



$$V_{PR} = V_{PYR}$$

$$A_\Delta \frac{2}{7}h = \frac{1}{3}A_\Delta h_K \quad \therefore \; h_K = \frac{2\cdot 3}{7\cdot 1}h = \frac{6}{7}\cdot 56 \text{ [cm]} = 48 \text{ cm}$$

(1)

$$\cos\varkappa = \frac{h_s}{h}$$

$$\therefore \quad h_s = h \cdot \cos\varkappa$$

$$= 56 \cdot \cos 70.158° \text{ [cm]}$$

$$h_s = 19.0 \text{ cm}$$

$$\tan\varkappa = \frac{h_K}{h_a}\,; \quad h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{h_K}{a} = \frac{2\cdot 48}{\sqrt{3}\cdot 20}\left[\frac{cm}{cm}\right] = 2.771'2\ldots$$

$$\therefore \; \varkappa = 70.158°$$

(0.5)

2

Pte

5. $y > |0.5x^2 + 0.5x - 3|$ 1)
$3y < (x+0.5)^2$ 2)

$\Big|\ \mathbb{L} = \{P(x/y) \mid \ldots\ldots\}\,!$

$1) \longrightarrow \quad 0 = 0.5x^2 + 0.5x - 3$
$\qquad\quad = x^2 + x - 6$
$\qquad 0 = (x+3)(x-2) \quad \therefore \ \underline{x_{11,12} = -3;\, 2}$

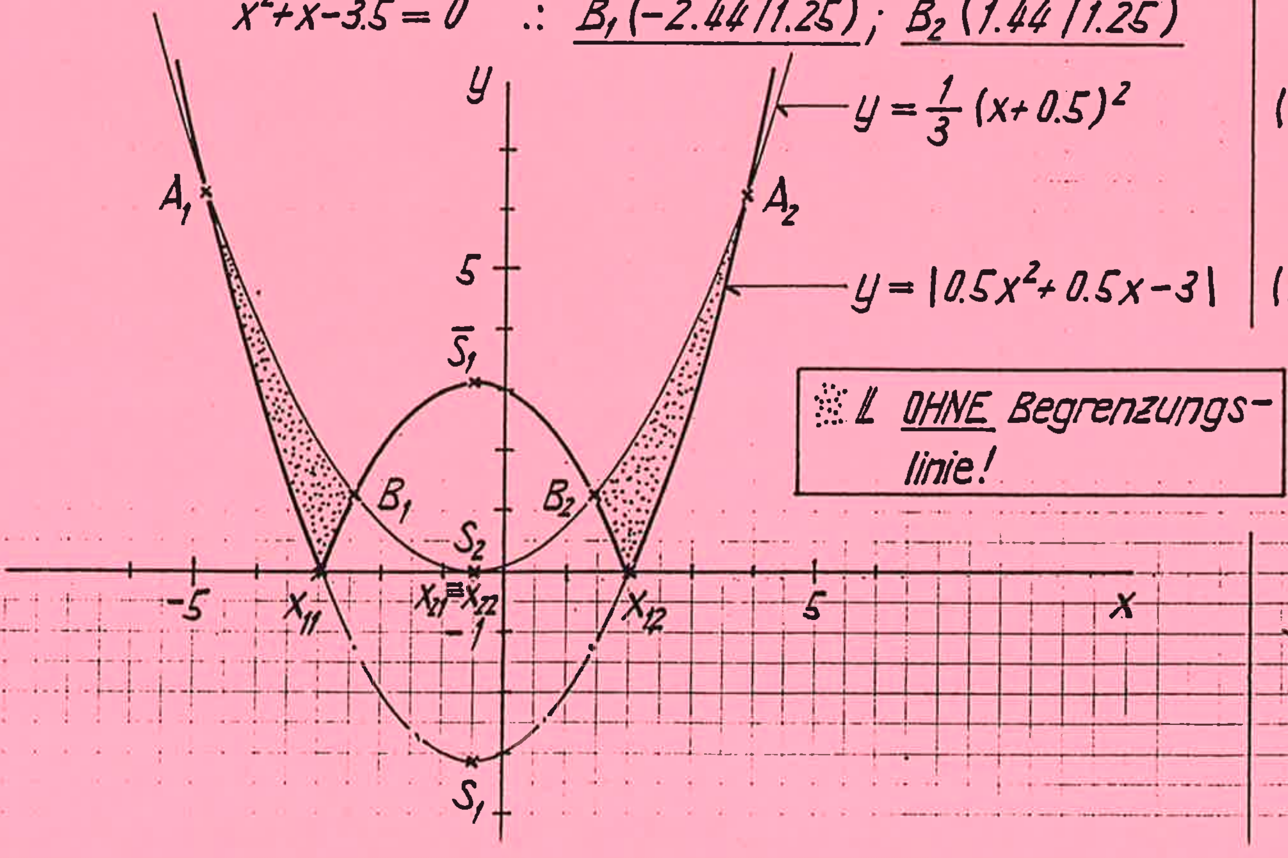
$\underline{S_1}$: $x_{s1} = -\frac{b}{2a} = -\frac{0.5}{2 \cdot 0.5} = -0.5$
$y_{s1} = -\frac{D}{4a} = -\frac{0.25 - 4 \cdot 0.5(-3)}{4 \cdot 0.5} = -3.125$ $\Big] \ \underline{S_1(-0.5/-3.125)}$

$2) \longrightarrow \quad y < \frac{1}{3}(x+0.5)^2$
$0 = \frac{1}{3}(x+0.5)^2 \quad \therefore \ \underline{x_{21,22} = -0.5}\ ;\ \underline{S_2(-0.5/0)}$

$\underline{\text{SCHNITTPUNKTE } A_{1,2} \text{ UND } B_{1,2} \text{ (NICHT VERLANGT!)}}$:

$A_{1,2}: \ 0.5x^2 + 0.5x - 3 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{37}{12} = 0$
$x^2 + x - 18.5 = 0 \quad \therefore \ \underline{A_1(-4.83/6.25)};\ \underline{A_2(3.83/6.25)}$

$B_{1,2}: \ -0.5x^2 - 0.5x + 3 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}$
$-\frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{35}{12} = 0$
$x^2 + x - 3.5 = 0 \quad \therefore \ \underline{B_1(-2.44/1.25)};\ \underline{B_2(1.44/1.25)}$



(1)
(1)

3

Pte

6.a. $h_x = h - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} s_x \quad \Big| \; h = \frac{\sqrt{3}}{2} s$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} s - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} s_x$$

$$\therefore \quad s_x = s - \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{3}} x$$

$$\underline{\underline{s_x = s - 2\sqrt{3}\, x}}$$ 1

b. LAENGEN IN [cm] !

$$V = A_\Delta \cdot x \qquad \Big| \qquad A_\Delta = \frac{1}{2} s_x \frac{\sqrt{3}}{2} s_x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} s_x^2 x \qquad \Big| \qquad s_x = s - 2\sqrt{3}\,x \; ; \; s = 10$$

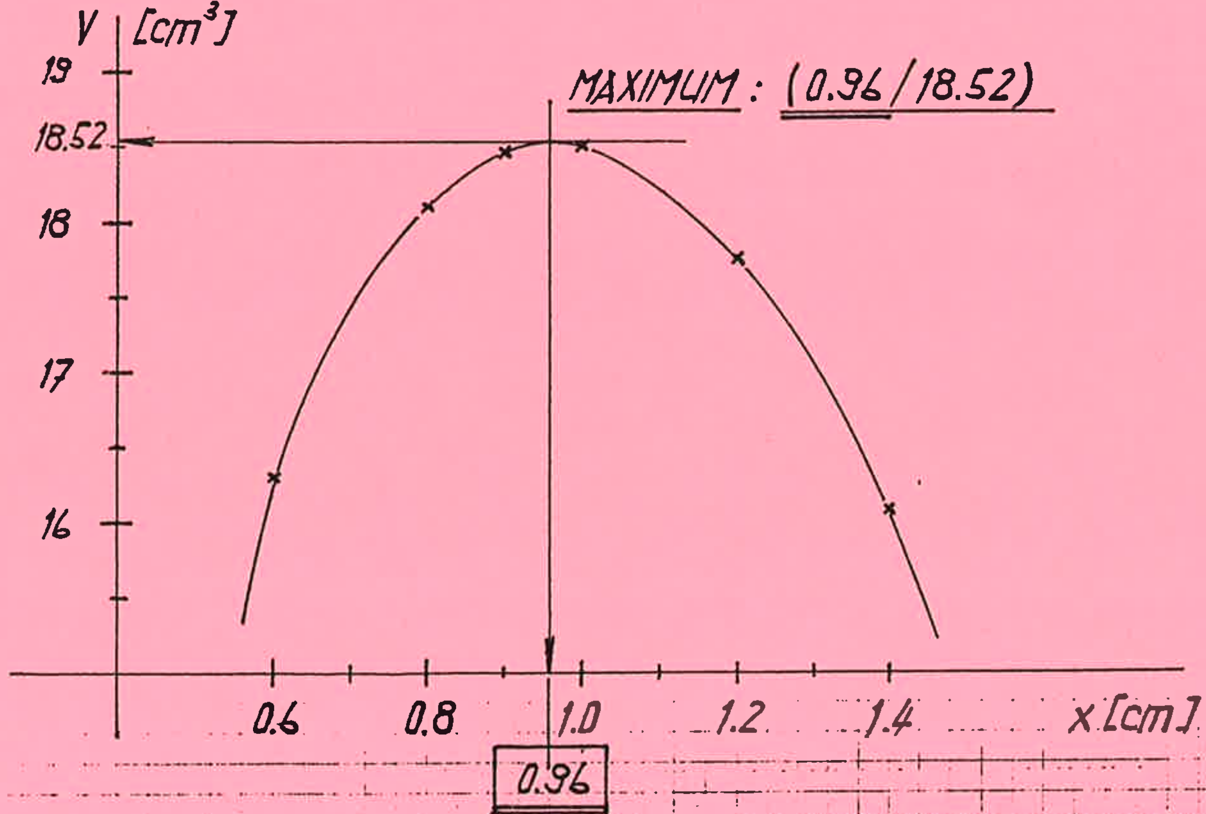
$$s_x^2 = (10 - 2\sqrt{3}\,x)^2 = 100 + 12x^2 - 40\sqrt{3}\,x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(12x^2 - 40\sqrt{3}\,x + 100)\,x \qquad \Big| \qquad D = \{0 < x < \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} s\} \; ; \; s = 10\,cm$$

$$\underline{\underline{V = 3\sqrt{3}\,x^3 - 30x^2 + 25\sqrt{3}\,x}} \qquad \Big| \qquad \underline{\underline{D = \{0 < x < \frac{5}{3}\sqrt{3}\ [cm]\}}}$$ 1

c.

x [cm]	0.2	0.4	0.6	0.8	*) 1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	*) 0.9
V [cm³]	7.50	12.85	16.30	18.10	18.50	17.74	16.08	13.77	11.05	8.17	18.46



$\underline{V_{max} = 18.52\ cm^3}$ BEI $\underline{\underline{x = 0.96\ cm}}$ 1

Pte

7. a. $P_1 \longrightarrow \quad \underline{c = 30\ [m]}$ (0.5

$P_2 \longrightarrow \quad 47.5 = 25^2 a + 25 b + 30$ 1)

$P_3 \longrightarrow \quad 25 = 100^2 a + 100 b + 30$ 2)

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ $a\,[m^{-1}]\,;\ b\,[1] = \ldots !$

$\underline{4 \cdot 1)} \qquad 190 = 2'500 a + 100 b + 120$ 3)

$\underline{3) - 2)} \qquad 165 = -7'500 a + 90$

$\therefore \qquad \underline{a = -0.01\ [m^{-1}]}$

$\underline{a \text{ IN } 2)} \qquad 25 = -100 + 100 b + 30$

$\therefore \qquad \underline{b = 0.95\ [1]}$ (0.5

$\underline{a;b;c} \rhd \qquad \underline{\underline{y = f(x\,[m]) = -0.01x^2 + 0.95x + 30\ [m]}}$ 1

b. $\underline{x_s} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0.95}{2(-0.01)}\,[m] = \underline{47.50\ m}$

$\underline{y_s} = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{0.95^2 - 4(-0.01)\cdot 30}{4(-0.01)}\,[m] = \underline{52.5625\ m}$

$\underline{\underline{S\,(47.50\,m\,/\,52.56\,m)}}$ 1

c. $\underline{x_{1,2}} = \dfrac{-0.95 \pm \sqrt{0.95^2 - 4(-0.01)\cdot 30}}{-2(0.01)}\,[m] = \underline{-25\,m\,;\ 120\,m}$

$x_1 = \underline{x_A = -25.00\ m}$

$\underline{\underline{y_B}} = -0.01 \cdot 110^2 + 0.95 \cdot 110 + 30\,[m] = \underline{\underline{13.50\,m}}$ 1

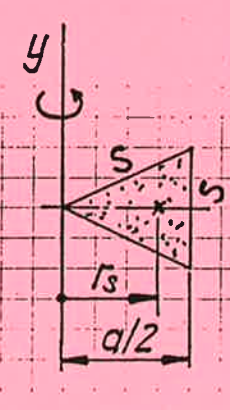
8. a. $V = A_M \cdot 2\pi \cdot R_s \qquad \Big|\ A_M = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2\ ;\ R_s = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot 2\pi\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} a$

$\underline{\underline{V = \dfrac{3}{2}\pi a^3}} \approx 4.712\, a^3$ 1

$\underline{\underline{A_0}} = 4a \cdot 2\pi\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} a = \underline{\underline{4\sqrt{3}\,\pi a^2}} \approx 21.766\, a^2$ 1

b.



$V_s = A_s \cdot 2\pi \cdot r_s \qquad \Big|\ A_s = \frac{1}{2} s \cdot \frac{1}{2} a\ ;\ \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} s$

$= \dfrac{2\pi \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 3 \cdot 3} a^3 \qquad \Big|\ A_s = \frac{1}{4\sqrt{3}} a^2\ ;\ r_s = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} a$

$\underline{\underline{V_s = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{18} a^3}} \approx 0.302'3\, a^3$ 1

Pte

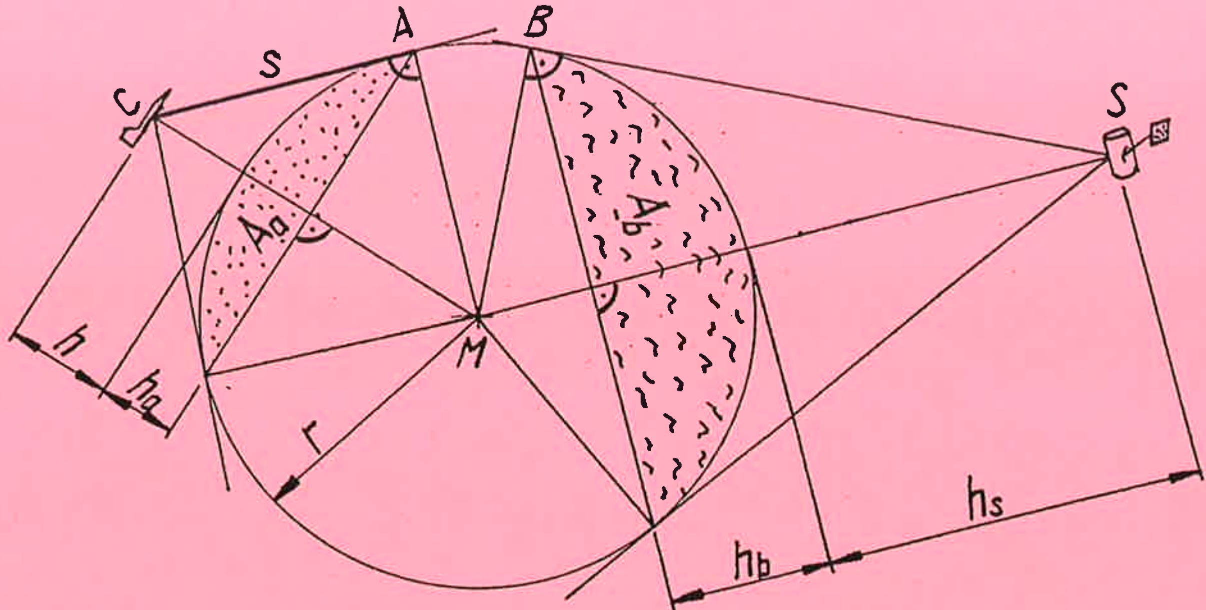
9. a. $\underline{\underline{C(18,4)}} = \binom{18}{4} = \frac{18!}{(18-4)!\,4!} = \frac{18!}{14!\,4!} = \underline{\underline{3'060}}$ 1

b. $\underline{\underline{M}} = C(18,4)\cdot 4! = 3'060\cdot 4! = \underline{\underline{73'440}}$

ODER

$\underline{\underline{M = P(18,4)}} = 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15 = \underline{\underline{73'440}}$ 1

10.



a. $s = \overline{CA} = \sqrt{(r+h)^2 - r^2} = \sqrt{2rh + h^2} = \sqrt{2\cdot 6'370\cdot 20 + 20^2}\ [\sqrt{km^2}]$

$\underline{\underline{s = 505\ km}}$ 1

b. $Q_a = \frac{A_a}{A_E}$ | $A_a = 2\pi r h_a$; $s^2 = (r+h)(h_a+h)$ KATH'S

$A_E = 4\pi r^2$

$= \frac{2\pi r h_a}{4\pi r^2}$ $\therefore\ h_a + h = (r+h) - \frac{r^2}{r+h}$

$= \frac{h_a}{2r} = \frac{19.937}{2\cdot 6'370}\ [\frac{km}{km}]$ $h_a = r - \frac{r^2}{r+h} = 6'370 - \frac{6'370^2}{6'390}\ [km]$

$\underline{\underline{Q_a = 0.001'5649 \approx 1.56‰}}$ $\underline{h_a = 19.937\ km}$ 1

c. $Q_b = \frac{A_b}{A_E} = \frac{h_b}{2r}$ $\therefore\ \underline{h_b} = Q_b\cdot 2r = \frac{1}{6}\cdot 2r = \underline{\frac{1}{3}r}$

$r^2 = (r+h_s)(r-h_b)$ KATH'S $\Big|\ h_b = \frac{1}{3}r$

$r^2 = \frac{2}{3}r^2 + h_s r \frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}r^2 = \frac{2}{3}h_s r$

$\therefore\ h_s = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}6'370\ [km]$

$\underline{\underline{h_s = 3'190\ km}}$ 1