Mathematik, Teil 1

Hinweise:

- Die Prüfungszeit beträgt 90 Minuten.
- Ausser den Schreib-, Zeichen- und Konstruktionsutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Alle Resultate müssen mit einem vollständigen, eindeutig nachvollziehbaren Lösungsweg belegt sein.
- Die Verwendung von Blei- und Farbstiften ist nur zur Erstellung von Skizzen, Diagrammen und Konstruktionen erlaubt.
- Ungültige Lösungsansätze und Resultate sind unmissverständlich durchzustreichen.
- Jede vollständig richtig gelöste Aufgabe wird mit 2 Punkten bewertet.
- Für 20 der 30 möglichen Punkte wird die Note 6 erteilt.

Wenn nichts anderes angegeben, gilt: Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$).

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\left(\frac{x+7}{2}+2\right) : \left(\frac{x+7}{2}-3\right) = \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$$

2. Welche Werte müssen den Variablen a und b zugeordnet werden, dass die Division

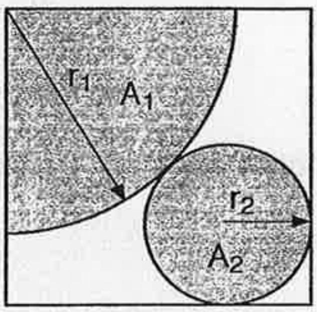
$$(z^4 + z^3 + z^2 + az + b) : (z^2 - 3z + 2)$$

ohne Rest durchgeführt werden kann?

3. Bringen Sie den Term $\dfrac{\sqrt[6]{y^7\sqrt{y}} \cdot \sqrt{1+y^{-1}}}{\sqrt[10]{\sqrt{y^5}} \cdot y \cdot \sqrt{y^{-1}+y^{-2}}}$ auf die Form y^k und bestimmen Sie die Wertzuordnung für k.

4. Weisen Sie rechnerisch nach, ob die drei Punkte A (– 15/13), B (19/– 8) und C (– 2/5) auf einer Geraden liegen oder nicht.

5. Formulieren Sie r_1 und r_2 in Abhängigkeit der Quadratseitenlänge a so, dass $A_1 = A_2$ ist.



6. a.) Berechnen Sie: $\log_{0.5}\frac{1}{64}$

   b.) Bestimmen Sie x so, dass in der Lösung nur noch die Parameter g und h auftreten: $x = \log_a \frac{1}{\sqrt[g]{a^h}}$

Bitte wenden!

7. Für welche ganzzahligen x-Werte ist das folgende Ungleichungssystem erfüllt?

$$0.1x > \frac{4-3x}{6} + \frac{2x-12}{9} > 0.5x \quad | \; x \in \mathbf{Z}$$

8. Konstruieren Sie in einen Kreissektor mit einem Zentriwinkel von 120° ein Quadrat, von dem zwei Ecken auf dem Kreisbogen und je eine Ecke auf einem sektorbegrenzenden Radius liegen. Erstellen Sie einen Konstruktionsbericht.

9. Berechnen Sie die Lösungsmenge, wenn $a \in \mathbf{R}^+$.

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+2a}} = 1$$

10. Der Graf der Funktion $y = x^3 - 15x^2 + 62x - 72$ geht durch den Punkt P (2/0). Berechnen Sie sämtliche Schnittpunkte mit der x-Achse.

11. Ein $\triangle$ ABC hat folgende Eigenschaften: $b = 15$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = 30°$. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt und die Höhe h_c.

12. Eine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ hat für $x=3$ den Funktionswert 4. Berechnen Sie den Funktionswert für $x_1=12$.

13. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

14. Es gilt: $\mathbf{G} = \mathbf{C}$ $(i^2 = -1)$. Berechnen Sie

    a.) die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - 4x + 7 = 0$

    b.) den Term $\dfrac{9+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}-9i}$

15. Begründen Sie mit Vektoroperationen, ob die beiden Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1.25 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 8 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen oder nicht.

Bitte wenden!

Lösungen | Pte

1. $\left(\frac{x+7}{2}+2\right):\left(\frac{x+7}{2}-3\right) = \frac{1}{3}:\frac{1}{2}$

$$\frac{x+11}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{2}$$

$$3x+33 = 2x+2$$

$$\underline{\underline{x = -31}}$$ 2

2. $(z^4+z^3+z^2+az+b):(z^2-3z+2) = z^2+4z+11$ (1)

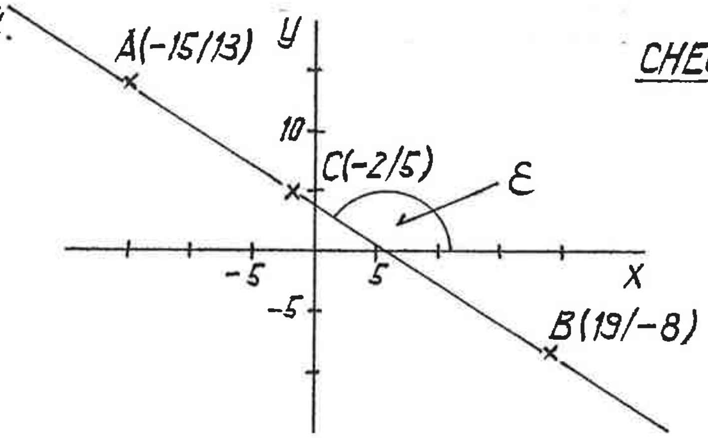
$$\begin{array}{l}
-(z^4-3z^3+2z^2) \\
\hline
\quad 4z^3-z^2+az+b \\
\quad -(4z^3-12z^2+8z) \\
\hline
\qquad 11z^2+(a-8)z+b \\
\qquad -(11z^2-\ 33z+22) \\
\hline
\qquad\qquad 0 \qquad 0 \longrightarrow \underline{\underline{a=-25\,;\ b=22}}
\end{array}$$ 2

3. $$\frac{\sqrt[6]{y^7\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\frac{y+1}{y}}}{\sqrt[10]{\sqrt{y^5}}\cdot y\cdot\sqrt{\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}} =$$

$$y^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}\cdot y^{\frac{7}{6}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\cdot(y+1)^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{2}}\cdot y^{-1}\cdot y^{\frac{2}{2}}(y+1)^{-\frac{1}{2}} =$$ (1)

$$y^{\frac{1+14-6-3}{12}} = \underline{y^{\frac{1}{2}} = y^k} \longrightarrow \underline{\underline{k=\frac{1}{2}}}$$ 2

4.

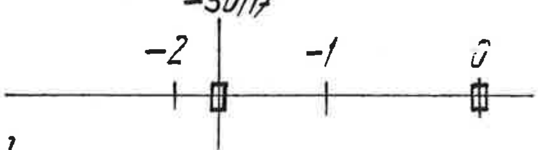


$\underline{\text{CHECK}}$: $m \mathrel{\hat{=}} \tan\varepsilon = ¢\ ?$

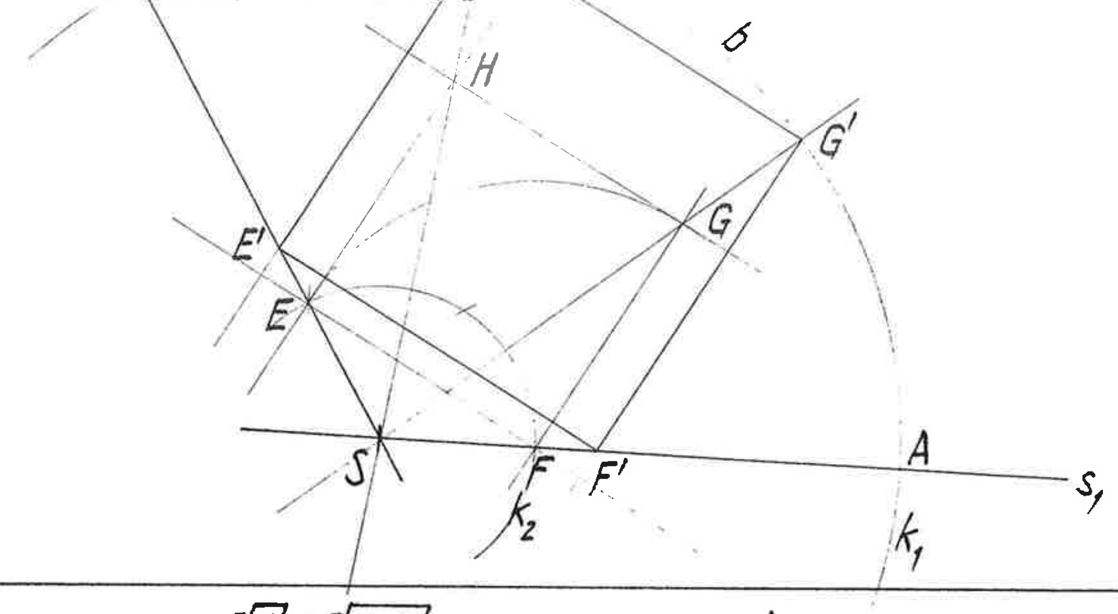
$$m = -\frac{8}{13} \overset{?}{=} -\frac{13}{21}$$

$$\underline{\underline{-168 \neq -169}}$$

$\underline{m \neq ¢}$ → DIE PTE A, B, C LIEGEN <u>NICHT</u> AUF EINER GERADEN! 2

	Pte
5. $$\left.\begin{array}{rcl} A_1 &=& A_2 \\ \frac{\pi}{4} r_1^2 &=& \pi r_2^2 \quad 1) \\ d &=& \sqrt{2}\, a \\ r_1 + r_2 + \sqrt{2}\, r_2 &=& \sqrt{2}\, a \quad 2) \end{array}\right] - r_{1,2} = f(a)\,!$$	(1)
1) $\longrightarrow$ $\underline{r_1 = 2 r_2}$ 3)	
$\underline{\text{3) IN 2)}}$ $r_2(3+\sqrt{2}) = \sqrt{2}\, a$	
$\therefore$ $\underline{\underline{r_2 = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\, a = \frac{3\sqrt{2}-2}{7}\, a}}$	$(1\frac{1}{2})$
$\underline{r_2 \text{ IN } 3)}$ $\underline{\underline{r_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\, a = \frac{2}{7}(3\sqrt{2}-2)\, a}}$	2
6. a. $\log_{0.5} \frac{1}{64} = x$	
$\therefore$ $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{64} = (\frac{1}{2})^6$	
$\therefore$ $\underline{\underline{x = \log_{0.5} \frac{1}{64} = 6}}$	1
b. $x = \log_a \frac{1}{\sqrt[g]{a^h}}$	
$\therefore$ $a^x = a^{-\frac{h}{g}}$	
$\therefore$ $\underline{\underline{x = -\frac{h}{g}}}$	1
7. $0.1x > \frac{4-3x}{6} + \frac{2x-12}{9} > 0.5x \quad \Big\vert\; x \in \mathbb{Z}$	
$0.1x > 0.5x$	
$\underline{x < 0}$ 1)	$(\frac{1}{2})$
$0.1x > \frac{12-9x+4x-24}{18}$	
$18x > -50x - 120$	
$x > -\frac{120}{68}$	
$\underline{x > -\frac{30}{17}}$ 2)	(1)
	
$\xrightarrow[x \in \mathbb{Z}]{1);\,2);}$ $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{x \mid -1\}}}$	2

	Pte
8. <u>K'Bericht</u>:	
1. $\sphericalangle(\overline{s_1, s_2}) = 120° \cap k_1(S; r_1) = \{A \in s_1; B \in s_2\}$; $\widehat{AB} = b$; $s_1 \cap s_2 = \{S\}$	
2. $k_2(S; r_2 < r_1) \cap (s_1 \wedge s_2) = \{E \in s_2; F \in s_1\}$; $\square EFGH$	
3. $\left.\begin{array}{l} SG(G) \cap b = \{G'\} \\ SH(H) \cap b = \{H'\} \end{array}\right\} \to \square E'F'G'H' \longrightarrow$ ZENTRISCHE STRECKUNG!	(1)



2

9.
$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x+2a}} = 1 \qquad \Big|\ a > 0;\ \underline{x \geq a}!$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = \sqrt{x-2a}$$
$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{x-a} + x - a = x + 2a$$
$$2\sqrt{x^2 - ax} = -x + 3a$$
$$4x^2 - 4ax = x^2 - 6ax + 9a^2$$
$$3x^2 + 2ax - 9a^2 = 0 \qquad (1)$$
$$\therefore \quad x_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9a^2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2a \pm 2\sqrt{28a^2}}{2 \cdot 3}$$
$$= \frac{-a + 2a\sqrt{7}}{3};\ \frac{-a - 2a\sqrt{7}}{3} \notin \mathbb{L}$$
$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{x \,\middle|\, \frac{2\sqrt{7} - 1}{3}a\right\}}} \qquad 2$$

10.
$$(x^3 - 15x^2 + 62x - 72) : (x - 2) = x^2 - 13x + 36 \qquad \Big|\ P(2/0) \longrightarrow \underline{\underline{x_1 = 2}}$$
$$\underline{-(x^3 - 2x^2)}$$
$$-13x^2 + 62x - 72$$
$$\underline{-(-13x^2 + 26x)}$$
$$36x - 72$$
$$-(36x - 72)$$

$$= (x-9)(x-4) \longrightarrow \underline{\underline{x_3 = 9;\ x_2 = 4}}$$

$$P(2/0) = P_1;\ x_{2,3} \longrightarrow \underline{\underline{S_x = \{P(x/y) \mid P_1(2/0); P_2(4/0); P_3(9/0)\}}} \qquad 2$$

	Pte
11. $A_\Delta = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} 15 \cdot 4 \cdot \sin 30° \, [cm^2]$	
$\underline{\underline{A_\Delta = 15 \, cm^2}}$	1
$\underline{\underline{h_c}} = b \cdot \sin\alpha = 15 \cdot \sin 30° \, [cm] \; \underline{\underline{= 7.5 \, cm}}$	1
12. $x \longrightarrow y = a^x = a^3 = 4 \quad \vert \quad x_1 = 4x = 4 \cdot 3 = 12$	
$\underline{\underline{y_1}} = a^{x_1} = a^{4x} = (a^x)^4 = 4^4 \; \underline{\underline{= 256}}$	2
13. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad \vert$ BIQUADR	
$\therefore \quad x_{1 \ldots 4} = \pm \sqrt{\frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}} = \pm \sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}} = \pm \sqrt{\{9;4\}}$	
$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{x \,\vert\, -3; -2; 2; 3\}}}$	2
14.a. $x^2 - 4x + 7 = 0 \quad \vert \quad \mathbb{G} = \mathbb{C}$	
$\therefore \quad \underline{\underline{x_{1,2}}} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = 2 \pm \frac{\sqrt{-12}}{2} \; \underline{\underline{= 2 \pm \sqrt{3}\, i}}$	1
b. $\underline{\underline{\frac{9 + \sqrt{3}\, i}{\sqrt{3} - 9i}}} = \frac{81i + 9\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 3i}{3 + 81} = \frac{84i}{84} \; \underline{\underline{= i}}$	1
15. $\vec{r} \cdot \vec{s} = \vert\vec{r}\vert \cdot \vert\vec{s}\vert \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{r}, \vec{s}) = \varepsilon) \quad \vert \quad \underline{\varepsilon = R = 90° \, ?}$	
$\therefore \quad \cos\varepsilon = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\vert\vec{r}\vert \cdot \vert\vec{s}\vert} = 0 \; ?$	
$\therefore \quad \underline{\underline{\vec{r} \cdot \vec{s}}} = 0 \; ?$	
$= \begin{pmatrix} 4 \\ -1.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.5 \\ 8 \end{pmatrix} = 10 - 10 \; \underline{\underline{= 0}} \longrightarrow \; \vert \; \varepsilon = R, \; \underline{\underline{\vec{r} \perp \vec{s}}}$	2