BSA/BMS

Abschlussprüfung vom 20. Juni 1997

Mathematik, Teil 2

Hinweise:

- Die Prüfungszeit beträgt 150 Minuten.
- Erlaubte Hilfmittel: - Taschenrechner
  - Tabellen- und Formelsammlungen ohne Lösungsbeispiele
  - Schreib-, Zeichen- und Konstruktionsutensilien
- Alle Resultate müssen mit einem vollständigen, eindeutig nachvollziehbaren Lösungsweg belegt sein.
- Die Verwendung von Blei- und Farbstiften ist nur zur Erstellung von Skizzen, Diagrammen und Konstruktionen erlaubt.
- Ungültige Lösungsansätze und Resultate sind unmissverständlich durchzustreichen.
- Die Bewertungspunkte für die vollständig richtige Lösung sind bei jeder Aufgabe angegeben.
- Für 18 der 28 möglichen Punkte wird die Note 6 erteilt.

Wenn nichts anderes angegeben, gilt: Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen (**G** = **R**).

1. Zuerst einige Informationen:
   Wenn ein Kapital K_0 n Jahre lang an Zinseszinsen liegt, dann beträgt des Kapital am Ende des n-ten Jahres $K_n = K_0 \cdot r^n$. Dabei ist $r = 1 + \frac{p}{100}$, p = Zinsfuss in %; z.B. p = 4.75 % → r = 1.0475.

   Nun die Fragen:
   a.) Auf welchen Betrag wachsen 1000 Fr. bei p = 2 % in 20 Jahren an? (auf 5 Rp. runden)
   b.) Wie viele Jahre dauert es, bis sich 1000 Fr. bei p = 2.6 % verdoppelt haben?
   c.) Bei welchem Zinsfuss (in % auf 3 signifikante Ziffern genau) verdoppeln sich 1000 Fr. schon in 15 Jahren?
   d.) Zeichnen Sie den Grafen der Funktion $n \rightarrow K_n = K_0 \cdot r^n$ für den Definitionsbereich $0 \le n \le 80$, wenn $K_0 = 1$ und $r = 1.04$ betragen. 3 P

2. a.) Wo schneidet die Ebene $9x + 4y + 12z - 36 = 0$ die drei Achsen?
   b.) Bestimmen Sie das Volumen der von den drei Achsenschnittpunkten und dem Koordinatenursprung gebildeten Pyramide. 2 P

3. Bestimmen Sie die Winkel α im Intervall $180° < \alpha < 360°$, welche die Gleichung
   $$\frac{1}{\tan(\alpha)} = \sin(2\alpha)$$ erfüllen. 2 P

4. Herr Müller spaziert langsam Stufe um Stufe auf einer sich abwärts bewegenden Rolltreppe hinunter und erreicht das untere Ende der Treppe nach 50 Stufen. Interessehalber rennt er dieselbe Rolltreppe wieder aufwärts, wobei er immer nur eine Stufe auf einmal nimmt, und kommt oben nach 150 Stufen an.
   Herr Müller bewegt sich doppelt so schnell aufwärts wie abwärts, d.h. er nimmt 2 Stufen in derselben Zeit, in der er vorher eine Stufe nahm. Wieviele Stufen wären sichtbar, wenn die Rolltreppe stehenbleiben würde?
   Hinweis: Es sei n die Anzahl der Stufen, die sichtbar sind, wenn sich die Rolltreppe nicht bewegt. t_0 sei die Zeiteinheit, die Herr Müller benötigt, um eine Stufe abwärts zu gehen. 2 P

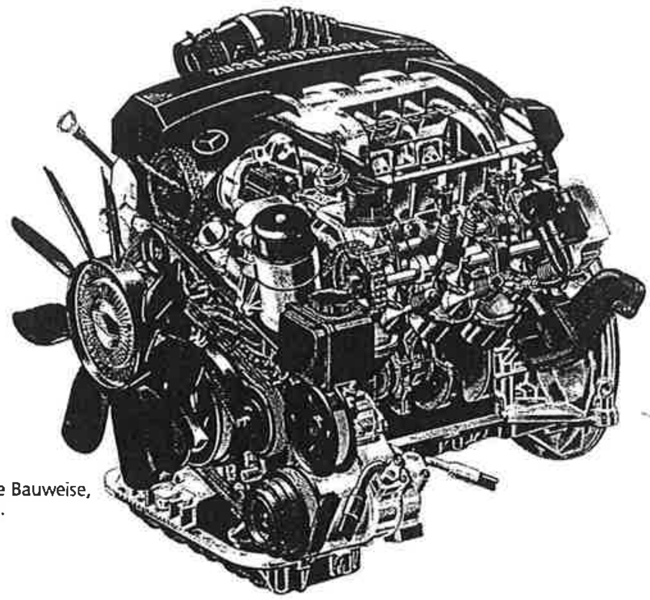
5. Erdradius $r_E = 6371$ km; Mondradius $r_M = 1738$ km

a.) Wieviele km^2 (auf 1 km^2 genau) der Erdoberfläche liegen nördlich des Breitenkreises 66.5° Nord? Wieviele Prozente (auf 1/1000 % genau) der ganzen Erdoberfläche sind das?

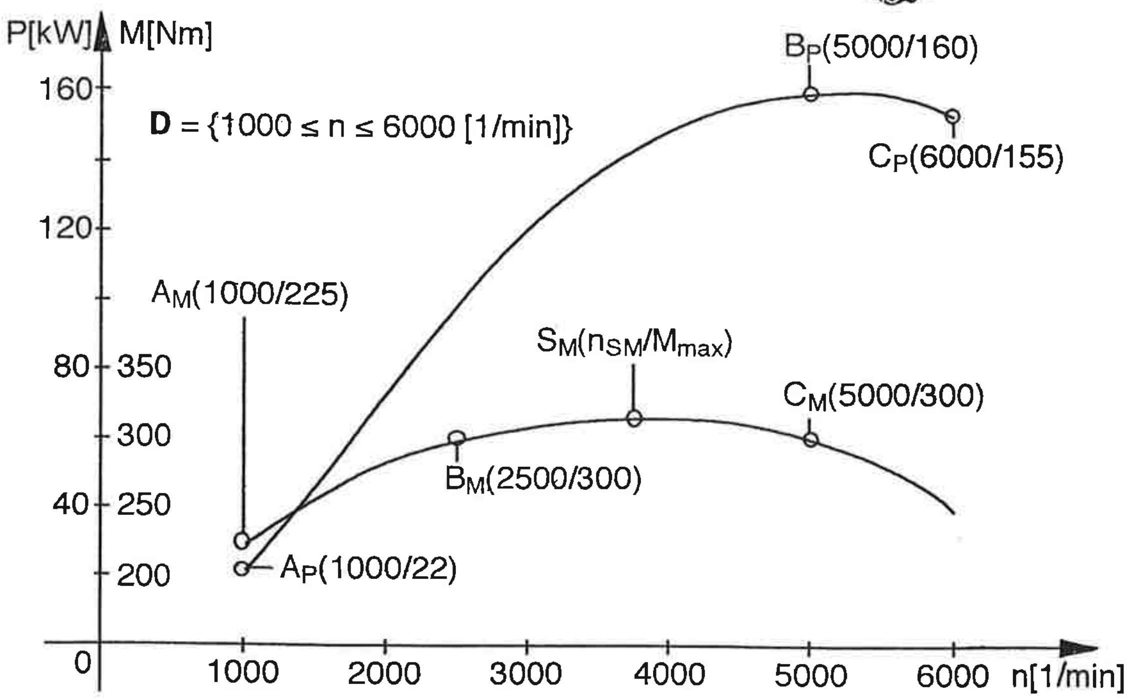
b.) Welcher nördliche Breitenkreis teilt die Erdoberfläche im Verhältnis 1 : 3?

c.) Der Verhältniswert Erd- zu Mondmasse beträgt 81. Berechnen Sie das Volumen- und das Dichteverhältnis der beiden Körper. 3 P

6. Die Leistungs (P)- und Drehmoment (M)-Charakteristiken des neuentwickelten 3.2 l - V6 - Motors von Mercedes-Benz für ihre E-Klasse-PW können durch quadratische Funktionen in Abhängigkeit der Kurbelwellendrehzahl (n) mit Hilfe der im Diagramm dargestellten Stützwerte A, B und C approximiert werden.



Der V6-Motor von Mercedes-Benz. Leichtbau (Motorgewicht 149; bisher 199 kg), kompakte Bauweise, geringer Verbrauch und drastisch gesenkte Abgaswerte zeichnen das neue Triebwerk aus.



a.) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Leistungsgrafen in der allgemeinen Form $n \rightarrow P = an^2 + bn + c$.

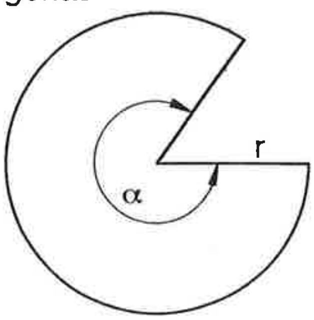
b.) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Drehmomentverlaufs in der Scheitelform $n \rightarrow M = a\,(n-n_{SM})^2 + M_{max}$ und berechnen Sie dabei den Scheitel $S_M\,(n_{SM} / M_{max})$.

c.) Berechnen Sie die Leistung bei maximalem Drehmoment.

d.) Berechnen Sie die maximale Leistung und das zugehörige Drehmoment. 4 P

7. Sie führen zwei Turniere durch und wollen 12 Mannschaften zulassen. Es stehen Ihnen zwei Hallen zur Verfügung.
   a.) Das erste Turnier ist ein Fussballturnier bei dem jede Mannschaft einmal gegen jede spielt. Wieviele Spiele gibt es?
   b.) Das zweite Mal organisieren Sie ein polysportives Turnier. Jede Mannschaft spielt einmal Hallenhockey und einmal Fussball gegen jede andere Mannschaft. Wieviele Spiele müssen Sie organisieren? 2 P

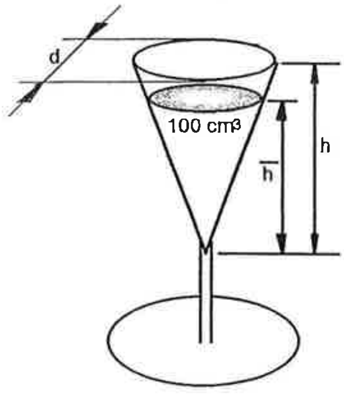
8. Aus einem Kreissektor (Skizze) mit vorgegebenem Radius r und veränderlichem Zentriwinkel α wird ein Kegelmantel geformt.
   a.) Entwickeln Sie die Funktionsgleichung zur Bestimmung des Kegelvolumens in Abhängigkeit des Zentriwinkels α bei vorgegebenem Sektorradius r.
   b.) Für den Radius r=10 cm wird das Kegelvolumen im Winkelbereich $290° < \alpha < 300°$ maximal. Bestimmen Sie den Winkel α für dieses Volumenmaximum auf 1° genau. 3 P



9. Stellen Sie grafisch die Punktmenge dar, deren Koordinatenwerte (x/y) die beiden Bedingungen $y - \frac{x}{x^2-4} \geq 0$ und $y \leq 0.5x + 1$ erfüllen. $\mathbf{D} = \{\, x \mid x \geq 0 \,\}$. 3 P

10. Susanne und Peter nehmen an einem Englisch-Kurs teil. Susanne hat in der Klasse doppelt so viele Kameraden wie Kameradinnen. Peter stellt fest: "Wenn vier meiner Kameraden Frauen wären, so hätte ich immer noch einen Kameraden mehr als Kameradinnen." Wie viele Studenten hat die Klasse? 2 P

11. Ein Kelchglas von der Form eines geraden Kreiskegels hat die Kegelhöhe h=12 cm und einen Öffnungdurchmesser von d = 6 cm. Es soll für 100 cm³ Inhalt geeicht werden. In welcher Höhe $\bar{h}$ muss der Eichstrich angebracht werden? 2 P



Lösungen | Pte

1\. a. $\underline{\underline{K_{20}}} = 1'000 \cdot 1.02^{20}$ [Fr.] $= \underline{\underline{1'485.95 \text{ Fr.}}}$ 0.5

b. $2K_0 = K_0 r^n$

$\therefore \ln 2 = n \cdot \ln(r) \quad | \quad r = 1.026$

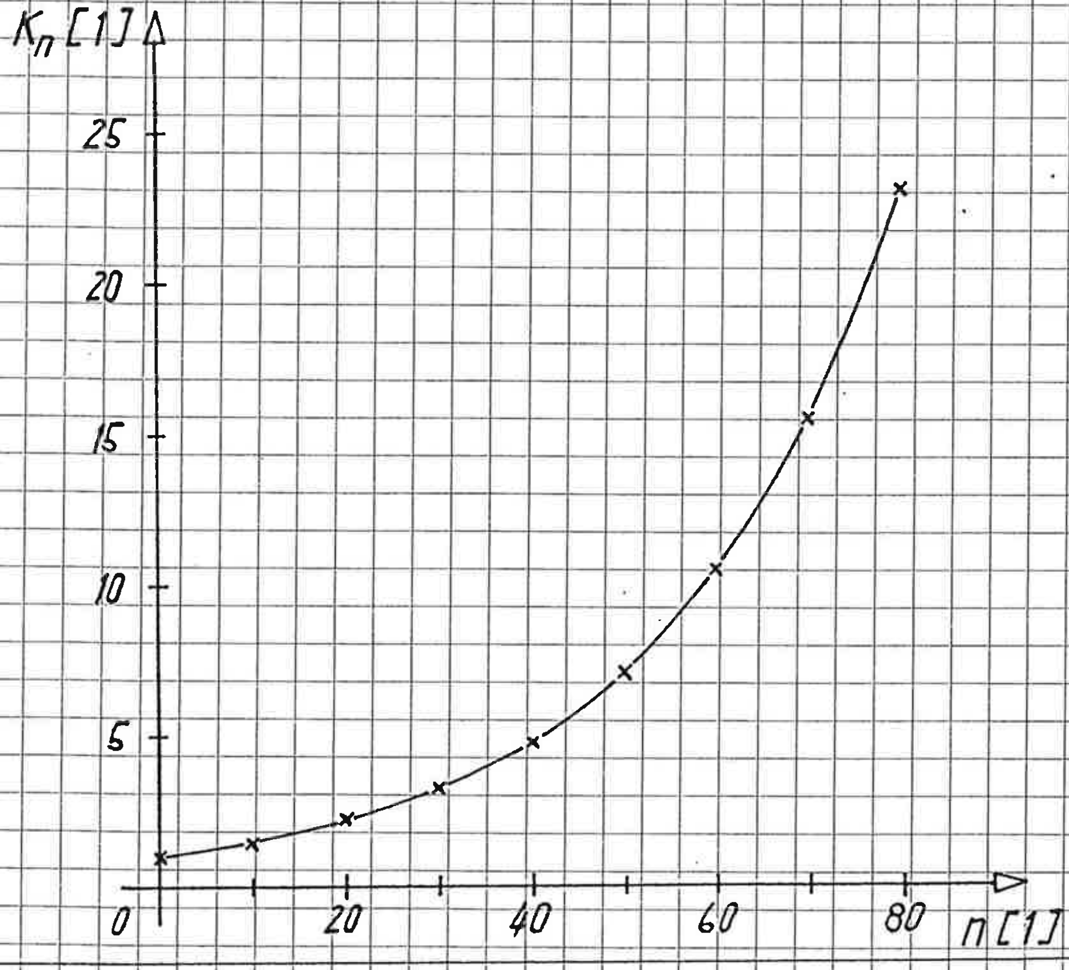
$\therefore \underline{\underline{n}} = \dfrac{\ln 2}{\ln 1.026} = \underline{\underline{27.005 \approx 27}}$; $[n] = a$ 1

c. $K_{15} = 2K_0 = K_0 r^{15}$

$\therefore \underline{r} = 2^{\frac{1}{15}} = \underline{1.047'294} \longrightarrow \underline{\underline{p = 4.73\%}}$ 0.5

d. Wertetabelle: $n \longrightarrow K_n = 1.04^n$

n	0	10	20	30	40	50	60	70	80
K_n	1	1.48	2.19	3.24	4.80	7.11	10.52	15.57	23.05



1

2\. a. $9x + 4y + 12z - 36 = 0 \xrightarrow{x_s, y_s, z_s} x_s = 4;\ y_s = 9;\ z_s = 3$

$\underline{\underline{S = \{(x/y/z) \mid (4/0/0); (0/9/0); (0/0/3)\}}}$ 1

b. $\underline{\underline{V}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} x_s y_s z_s = \dfrac{1}{6} \cdot 4 \cdot 9 \cdot 3$ [1] $= \underline{\underline{18}}$ 1

3.	$\frac{1}{\tan\alpha} = \sin(2\alpha)$	$D = \{\alpha \mid 180° < \alpha < 360°\}$	Pte

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \longrightarrow \cos\alpha = 0$$

$$\alpha_{1,2} = 90° \notin D;\ 270° \notin \mathbb{L},\quad \tan 270° = \{\ \}$$ (0.5)

$$1 = 2\cdot\sin^2\alpha$$

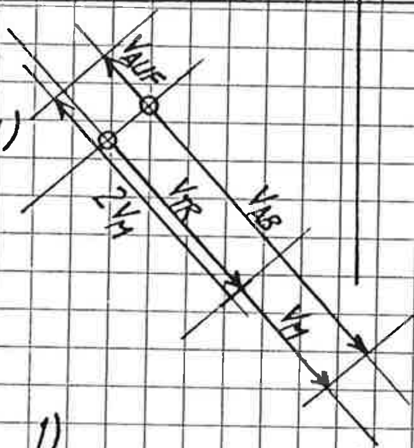
$$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$ (1)

$$\therefore\ \alpha_{I..IV} = 45° \notin D;\ 135° \notin D;\ 225°;\ 315°$$ (1.5)

$$\xrightarrow[\alpha_{I..IV}]{\alpha_{1,2}}\quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\alpha \mid 225°;\ 315°\}}}$$ 2

4. Anzahl Stufen:

$$\left.\begin{aligned} n_{AB} &= 50 \\ n_{AUF} &= 150 \\ n &= \ldots ! \end{aligned}\right\} \hat{=}\ s\ (\text{Weg})$$



$$t_{AB} = n_{AB}\cdot t_0$$

$$t_{AUF} = \frac{1}{2}\,n_{AUF}\cdot t_0$$

$$v_{TR} = \frac{n - n_{AB}}{t_{AB}} \qquad 1)$$

$$v_{TR} = \frac{n_{AUF} - n}{t_{AUF}} \qquad 2)$$ (1)

$\underline{1);2)\ \text{GLEICHS}}$

$$\frac{n - n_{AB}}{t_{AB}} = \frac{n_{AUF} - n}{t_{AUF}}$$

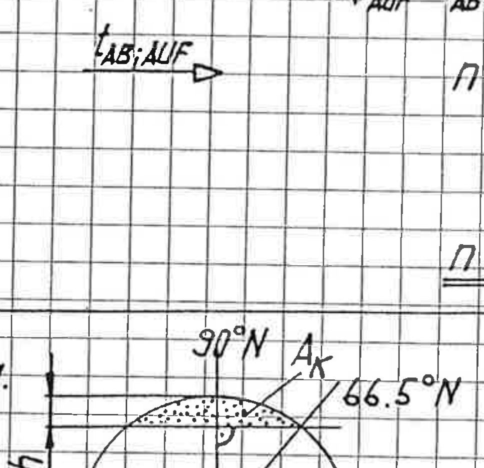
$$n(t_{AUF} + t_{AB}) = n_{AUF}\,t_{AB} + n_{AB}\,t_{AUF}$$

$$\xrightarrow{t_{AB;AUF}}\quad n = \frac{n_{AUF}\,n_{AB}\,t_0 + n_{AB}\cdot 0.5\cdot n_{AUF}\,t_0}{t_0\,(0.5\cdot n_{AUF} + n_{AB})}$$

$$= \frac{150\cdot 50 + 0.5\cdot 50\cdot 150}{0.5\cdot 150 + 50}\ [1]$$

$$\underline{\underline{n = 90}}$$ 2

5a.



$$A_K = 2\pi r_E h \qquad \mid h = r_E - r_E\cdot\sin\alpha$$

$$= 2\pi r_E^2(1 - \sin\alpha)$$

$$= 2\pi\cdot 6'371^2\cdot(1 - \sin 66.5°)\ [km^2]$$

$$\underline{\underline{A_K = 21'152'355\ km^2}}$$ 0.5

$$\underline{\underline{\frac{A_K}{A_E}}} = \frac{2\pi r_E^2(1-\sin\alpha)}{4\pi r_E^2} = \frac{1}{2}(1 - \sin 66.5°)\ [1] = 0.041'469'963$$

$$\underline{\underline{\approx 4.147\ \%}}$$ 0.5

5.b. $\frac{A_K}{A_E} = \frac{1}{4} \quad \therefore \quad 4A_K = A_E$ | Pte

$$4 \cdot 2\pi r_E^2 (1-\sin\alpha) = 4\pi r_E^2$$

$$1-\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = 0.5$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{\alpha = 30° N(\text{ord})}}$$ 1

c. $\underline{\underline{\frac{V_E}{V_M}}} = \frac{r_E^3}{r_M^3} = \frac{6'371^3}{1'738^3} \left[\frac{km^3}{km^3}\right] \underline{\underline{= 49.257'629}}$ 0.5

$$\frac{m_E}{m_M} = \frac{r_E^3 \rho_E}{r_M^3 \rho_M} = 81$$

$\therefore \quad \underline{\underline{\frac{\rho_E}{\rho_M}}} = 81 \frac{r_M^3}{r_E^3} = 81 \frac{1'738^3}{6'371^3} \left[\frac{km^3}{km^3}\right] \underline{\underline{= 1.644'415}}$ 0.5

6.a. Es gilt für: $P\,[kW]$; $n\,[min^{-1}]$; $a\,[kW \cdot min^2]$; $b\,[kW \cdot min]$; $c\,[kW]$

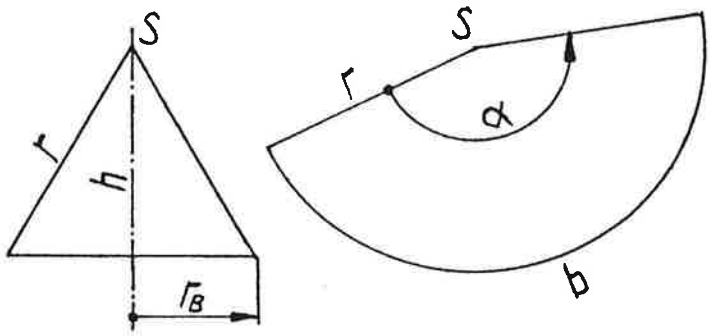
$$\left.\begin{array}{lrcl} A_P: & 22 &=& 10^6 a + 10^3 b + c \\ B_P: & 160 &=& 25 \cdot 10^6 a + 5 \cdot 10^3 b + c \\ C_P: & 155 &=& 36 \cdot 10^6 a + 6 \cdot 10^3 b + c \end{array}\right] [kW] \quad a,b,c = \ldots!$$ 1) 2) 3) (0.5)

5·1)	$110 = 5 \cdot 10^6 a + 5 \cdot 10^3 b + 5c$	4)	
2)−4)	$50 = 20 \cdot 10^6 a - 4c$	5)	
6·1)	$132 = 6 \cdot 10^6 a + 6 \cdot 10^3 b + 6c$	6)	
3)−6)	$23 = 30 \cdot 10^6 a - 5c$	7)	
1.5·5)	$75 = 30 \cdot 10^6 a - 6c$	8)	
7)−8)	$\underline{c = -52}$		
$5) \xrightarrow{c}$	$\underline{a} = \frac{50-4 \cdot 52}{20 \cdot 10^6} \underline{= -7.9 \cdot 10^{-6}}$		
$1) \xrightarrow{a;c}$	$\underline{b} = (22+7.9+52) \cdot 10^{-3} \underline{= 81.9 \cdot 10^{-3}}$		
$\xrightarrow{a;b;c}$	$\underline{n \rightarrow P = -7.9 \cdot 10^{-6} n^2 + 8.19 \cdot 10^{-2} n - 52}$		1

b. Es gilt für: $M\,[Nm]$; $n\,[min^{-1}]$; $a\,[Nm \cdot min^2]$; $b\,[Nm \cdot min]$; $c\,[Nm]$

$$\left.\begin{array}{lrcl} A_M: & 225 &=& 10^6 a + 10^3 b + c \\ B_M: & 300 &=& 6.25 \cdot 10^6 a + 2.5 \cdot 10^3 b + c \\ C_M: & 300 &=& 25 \cdot 10^6 a + 5 \cdot 10^3 b + c \end{array}\right] [Nm] \quad a,b,c = \ldots!$$ 1) 2) 3) (0.5)

2·2)	$600 = 12.5 \cdot 10^6 a + 5 \cdot 10^3 b + 2c$	4)
3)−4)	$-300 = 12.5 \cdot 10^6 a - c$	5)
2.5·1)	$562.5 = 2.5 \cdot 10^6 a + 2.5 \cdot 10^3 b + 2.5c$	6)
2)−6)	$-262.5 = 3.75 \cdot 10^6 a - 1.5c$	7)
1.5·5)	$-450 = 18.75 \cdot 10^6 a - 1.5c$	8)
7)−8)	$187.5 = -15 \cdot 10^6 a \quad \therefore \quad a = -12.5 \cdot 10^{-6}$	

	Pte
6. 5) $\xrightarrow{a}$ $\underline{c} = -12.5^2 + 300 = \underline{143.75}$	
1) $\xrightarrow{a;c}$ $\underline{b} = (225 + 12.5 - 143.75)\cdot 10^{-3} = \underline{93.75\cdot 10^{-3}}$	
$\underline{n_{SM}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{93.75\cdot 10^{-3}}{2(-12.5)\cdot 10^{-6}} = \underline{3'750}$	
$\underline{M_{max}} = -\dfrac{D}{4a} = -\dfrac{93.75^2\cdot 10^{-6} - 4(-12.5)\cdot 10^{-6}\cdot 143.75}{4(-12.5)\cdot 10^{-6}} = \underline{319.531}$	
$\xrightarrow{(n_{SM}/M_{max})}$ $\underline{\underline{S_M(3'750/319.5)}}$	0.5
$\xrightarrow{a;\,S_M}$ $\underline{\underline{n \longrightarrow M = -12.5\cdot 10^{-6}(n-3'750)^2 + 319.5}}$	0.5
c. $\xrightarrow[S_M]{P=f(n)}$ $P_{Mmax} = -7.9\cdot 10^{-6}\cdot 3'750^2 + 8.19\cdot 10^{-2}\cdot 3'750 - 52$ [kW]	
$\underline{\underline{P_{Mmax} = 144.0(31)\ \text{kW}}}$	1
d. $\underline{\underline{P_{max}}} = -\dfrac{D}{4a} = -\dfrac{8.19^2\cdot 10^{-4} - 4(-7.9)\cdot 10^{-6}\cdot(-52)}{4\cdot(-7.9)\cdot 10^{-6}}$ [kW] $= \underline{\underline{160.3\ \text{kW}}}$	0.5
$\underline{n_{SP}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8.19\cdot 10^{-2}}{2\cdot(-7.9)\cdot 10^{-6}}$ $[\min^{-1}]$ $= \underline{5'184\ \min^{-1}}$	
$\xrightarrow{M=f(n);\,n_{SP}}$ $\underline{\underline{M_{Pmax}}} = -12.5\cdot 10^{-6}(5'184 - 3'750)^2 + 319.5$ [Nm] $= \underline{\underline{293.8\ \text{Nm}}}$	0.5
7.a. $Z_S = C(n,r) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \dfrac{12!}{2!(12-2)!} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10!}{2\cdot 1\cdot 10!}$	
$\underline{\underline{Z_S = 66}}$ (Spiele) $\longrightarrow$ (33 Spiele pro Halle)	1
b. $\underline{\underline{Z_{PS}}} = 2Z_S = 2\cdot 66 = \underline{\underline{132}}$ (Spiele) $\longrightarrow$ (66 Spiele pro Halle)	1
8.a. 	
$b = 2\pi r\dfrac{\alpha°}{360°} = 2\pi r_B$	
$\therefore\ \underline{r_B = r\dfrac{\alpha°}{360°}}$	(0.5)
$\underline{h} = \sqrt{r^2 - r_B^2} = \underline{r\sqrt{1-\left(\frac{\alpha°}{360°}\right)^2}}$	(0.5)
mit $10^3 \rightarrow$	(1.5)
$\underline{\underline{V}} = f(\alpha; r=\text{¢}) = \dfrac{1}{3}\pi r_B^2\cdot h = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}\pi r^3\left(\frac{\alpha°}{360°}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\alpha°}{360°}\right)^2}}}$	2
b. $\underline{\text{Wertetabelle}}$: $290° < \alpha < 300°$; $r = 10\,\text{cm}$	

α [°]	291	292	293	294	295	296	297
V [cm³]	402.83	402.96	403.04	$\underbrace{403.07}_{V'_{max}}$	403.03		

	Pte
$\xrightarrow{V_{max}}$ $\underline{\underline{\alpha_{Vmax} = 294°}}$	1

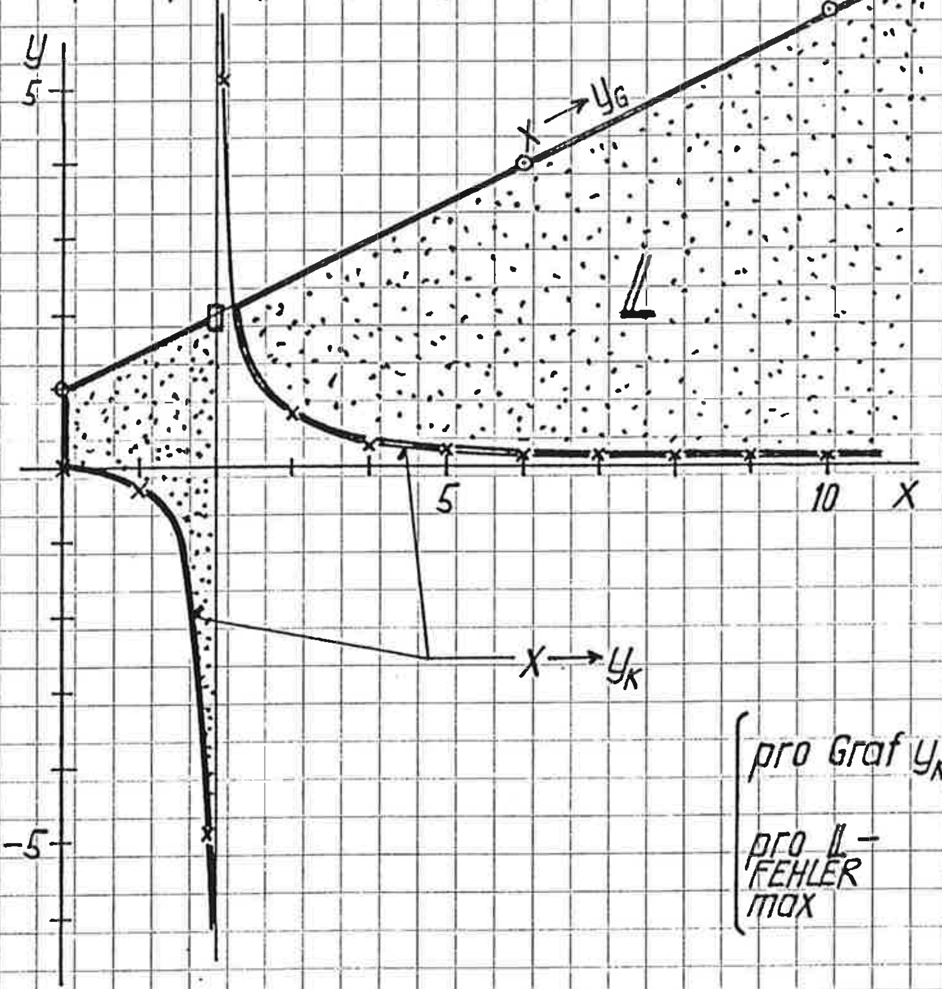
9. $\quad y - \dfrac{x}{x^2-4} \geqslant 0$ **Pte**

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} & y_K \geqslant \frac{x}{x^2-4} \\ \wedge \quad & y_G \leqslant 0.5x+1 \end{aligned}\right] \quad \underline{x \geqslant 0}$$

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1.9	2.1
y_K	0	−1/3	{ }	0.6	1/3	0.24	0.19	0.16	0.13	0.12	0.10	−4.87	5.12
y_G	1						4				6		

EDKKS



3

$\left(\begin{array}{ll} \text{pro Graf } y_{K,G} & 1 \\ \text{pro } \mathbb{L}\text{-FEHLER} & -0.5 \\ \text{max} & -1 \end{array} \right)$

Pte

AP 97

10. S Studenten; W Weiblich; M Männlich — Anzahl; $S = \ldots !$

Susanne: $S = (W-1) + 2(W-1) + 1 = 3W-2$ 1)

Peter: $S = (M-5) + (M-6) + 1 = 2M-10$ 2)

$S = W+M$ 3) (1)

1); 2) GLEICHS

$$3W-2 = 2M-10$$

$$\therefore \quad W = \frac{2}{3}(M-4) \qquad 4)$$

3) IN 1) $M+W = 3W-2$

$$M = 2(W-1)$$

$$\xrightarrow{4)} \quad M = 2\cdot\frac{2}{3}(M-4)-2$$

$$-\frac{1}{3}M = -\frac{16}{3}-2$$

$$\left.\begin{array}{l} M = 16+6 = 22 \\ W = \frac{2}{3}(22-4) = 12 \end{array}\right\} S = 34$$

M IN 4) 2

11. $$\frac{V}{\overline{V}} = \frac{h^3}{\overline{h}^3}$$

$$\therefore \quad \overline{h} = \sqrt[3]{\overline{V}/V}\,h \qquad \Big|\ V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}d^2h \qquad (1)$$

$$= h\left(\frac{12\,\overline{V}}{\pi d^2 h}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{12\cdot h^2}{\pi\cdot d^2}\overline{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{12\cdot 12^2\cdot 100}{\pi\cdot 6^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad [\sqrt[3]{cm^3}]$$

$$\overline{h} = 11.518\ cm \approx 11.52\ cm \qquad 2$$