Berufsmaturitätsprüfung 1997

Technische Abteilung

Mathematik Serie A

Lösungen

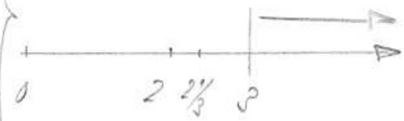
A1

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-4} - \sqrt{3x-7} = 0 \quad , \quad G = \mathbb{R} \,!$$

D:

$$\left.\begin{array}{lll} x-3 \geq 0 & \longrightarrow & x \geq 3 \\ 2x-4 \geq 0 & \longrightarrow & x \geq 2 \\ 3x-7 \geq 0 & \longrightarrow & x \geq 2\tfrac{1}{3} \end{array}\right\}$$

0,75



Die Wurzelgleichung ist definiert für:

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \,,\; x \geq 3\}$$

0,5

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-4} - \sqrt{3x-7} = 0$$

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-4} = \sqrt{3x-7} \qquad /\,(\;)^2$$

$$\cancel{x}-\cancel{3} + 2\sqrt{(x-3)(2x-4)} + \cancel{2x} - \cancel{4} = \cancel{3x} - \cancel{7} \qquad /:2$$

0,75

$$\sqrt{(x-3)(2x-4)} = 0 \qquad /\,(\;)^2$$

$$(x-3)(2x-4) = 0$$

0,5

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x_1 = 3} \\ \underline{x_2 = 2} \end{array}\right\} \text{Scheinlösungen}$$

Kontrolle über D!

0,5

D wird nur durch „3" erfüllt! Die Wurzelgleichung hat eine reelle Lösung: $\mathbb{L} = \{3\}$

A2 $\dfrac{x^2-8x+4b}{x-3} - \dfrac{3b+20}{x-4} = \dfrac{x^2-9x-3b}{x-4} + \dfrac{b-6}{x-3}$, $G=\mathbb{R}$!

Bem.: Die Gleichung ist nach b aufzulösen, da x hat die Funktion eines Parameters!

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-8x+4b-b+6}{x-3} = \frac{x^2-9x\cancel{-3b}+\cancel{3b}+20}{x-4}$$

$$\frac{x^2-8x+3b+6}{x-3} = \frac{x^2-9x+20}{x-4}$$

$$\frac{x^2-8x+3b+6}{x-3} = \frac{(x-5)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}} \qquad | \cdot (x-3)$$

$$x^2-8x+3b+6 = (x-5)(x-3)$$

$$\cancel{x^2}-\cancel{8x}+3b+6 = \cancel{x^2}-\cancel{8x}+15$$

2

$$3b = 9$$

$$\underline{b=3} \quad \text{(mögliche Lösung!)}$$

Kontrolle: b in Ausgangsgleichung einsetzen!

$$\frac{x^2-8x+4\cdot 3-3+6}{(x-3)} \stackrel{?}{=} \frac{x^2-9x+20}{x-4}$$

$$\frac{x^2-8x+15}{(x-3)} \stackrel{?}{=} (x-5)$$

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x-5)}{\cancel{(x-3)}} = (x-5)$$

1

$$\underline{(x-5) = (x-5)}$$

Die Gleichung wird erfüllt!

$\underline{\underline{b=3}}$ ist die Lösung!

A3

$$\frac{4x+1}{11-x} \geq \frac{4x-7}{-x-11} \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$$

$$\frac{4x+1}{(11-x)} - \frac{4x-7}{(-x-11)} \geq 0$$

a) $\mathbb{D}$:

$$11 - x \neq 0 \rightarrow \underline{x \neq 11}$$
$$-x - 11 \neq 0 \rightarrow \underline{x \neq -11}$$

0,75

$$\underline{\underline{\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-11, 11\}}}$$

b)

$$\frac{4x+1}{(11-x)} + \frac{4x-7}{(x+11)} \geq 0$$

$$\frac{(4x+1)(x+11) + (4x-7)(11-x)}{(11-x)(x+11)} \geq 0$$

$$\frac{\cancel{4x^2} + 44x + x + 11 + 44x - \cancel{4x^2} - 77 + 7x}{(11-x)(x+11)} \geq 0$$

$$\frac{96x - 66}{(11-x)(x+11)} \geq 0$$

$$\underline{\frac{(16x - 11)}{(11-x)(x+11)} \geq 0}$$

1

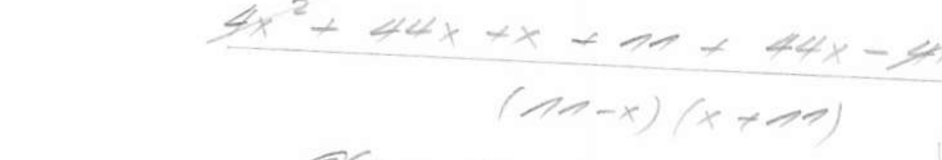
falls $(16x - 11) = 0$ gilt $U = 0$! für
$\underline{\underline{x = \frac{11}{16}}}$ $(\approx 0{,}6875)$ 0,5

<u>Bem:</u> über $x = \frac{11}{16}$, $x = 11$ und $x = -11$ wird $\mathbb{G}$ in Intervalle eingeteilt.
Intervalle welche die Ungleichung erfüllen sind alternierend zu denen die nicht Lösung sind.
Wir testen am Zahlenstrahl mit $\underline{x = 0}$

$$\rightarrow \frac{-11}{11 \cdot 11} < 0 \; ! \quad x \notin \mathbb{L}$$

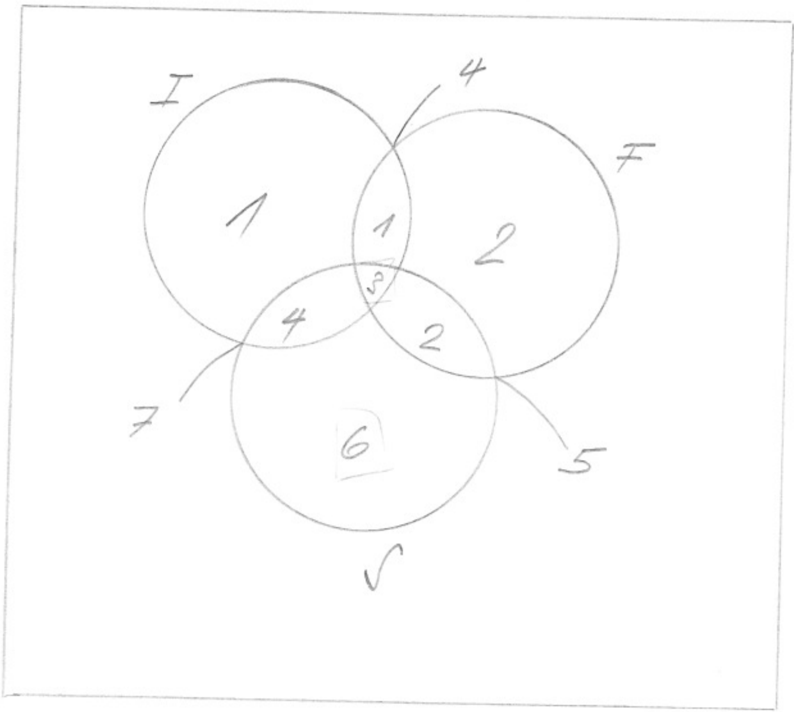
<u>Zahlenstrahl:</u>

1



$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\; x < -11 \;\wedge\; \tfrac{11}{16} \leq x < 11\}}}$$

A4 Die Lösung finden wir über die Venn-Diagramme wie sie in der Mengenlehre eingesetzt werden!



35 Familien

Bem: Über die letzten beiden Aussagen lassen sich „rückwärts" alle anderen verarbeiten.

Zur Frage: U ist die Vereinigung:

$U = I \cup F \cup V =$ <u>19 Familien</u>

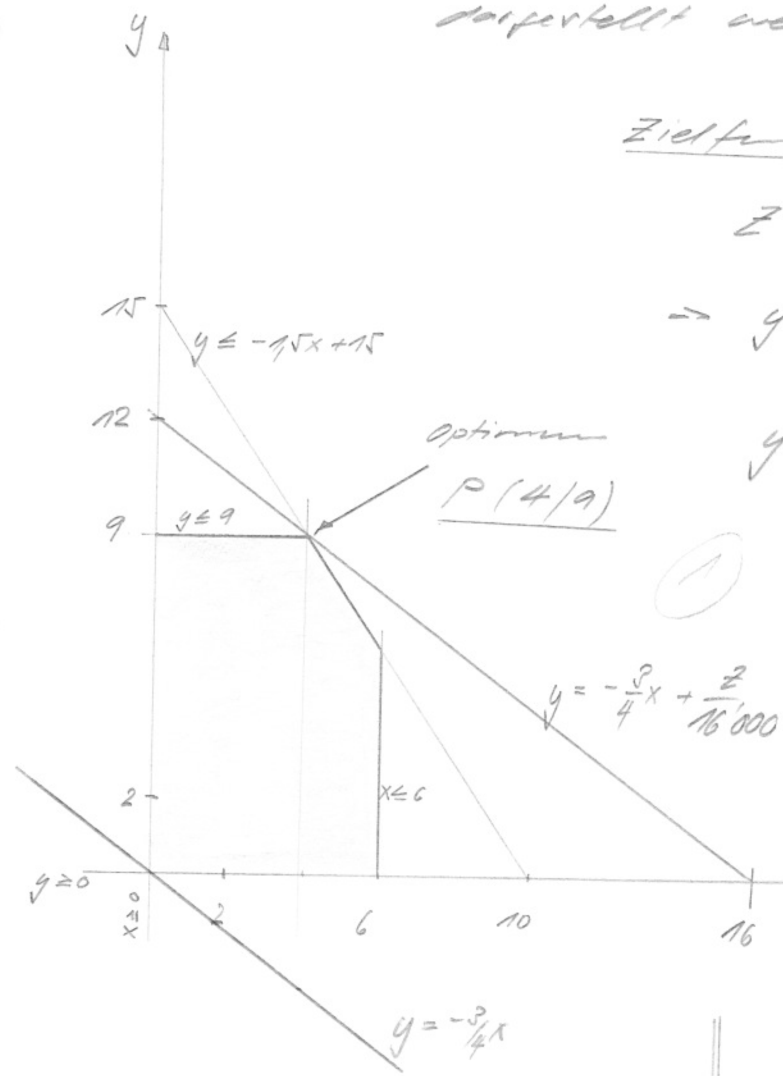
A5 **Lineare Optimierung**

Motoryachten y
Segelyachten x

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{y}{15} + \dfrac{x}{10} \leq 1 \;\Rightarrow & y \leq -\dfrac{15}{10}x + 15 \\ & y \leq -1{,}5x + 15 \\ y \leq 9 & \\ x \leq 6 & \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & \end{array} \right\}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$$

1

Bedingungen welche im x,y Diagramm dargestellt werden.



1

Zielfunktion

$$Z = G = 12'000x + 16'000y$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{12'000}{16'000}x + \frac{Z}{16'000}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{Z}{16'000}$$

0,5

$$G = 12'000 \cdot 4 + 16'000 \cdot 9$$

$$\underline{\underline{G = 192'000\text{ Fr}}}$$

0,5

Kapazitätsauslastung

Werft: 100%

Montage: Segelyachten 66,7%
(4 von 6 möglichen)

Montage: Motoryachten 100%

A6 Reaktionsgleichung

$$r\, C_3H_5N_3O_9 \Rightarrow t\, CO_2 + u\, H_2O + v\, N_2 + w\, O_2$$

4 verschiedene Atome sind an der Reaktion beteiligt: C, H, N O

- links und rechts der Reaktion müssen gleich viele Atome beteiligt sein. Mathematisch können wir die Bilanz für jedes Atom aufschreiben:

(0,75)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} r & t & u & v & w \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ H \\ N \\ O \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 9 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5 Unbekannte
4 Gleichungen
-> Homogenes Gleichungssystem

-> Es gibt eine nicht triviale Lösung, wir wissen aber zusätzlich, dass $r, t, u, v, w \in \mathbb{N}$ und möglichst klein sein sollen

Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$3r - 12 = 0 \qquad \underline{r = 4}$

$t - 12 = 0 \Rightarrow \underline{t = 12}$ (0,5)

$\Rightarrow -6u + 60 = 0 \qquad \underline{u = 10}$

$\Longrightarrow 2v - 12w = 0 \qquad \boxed{v = 6w}$

(1,25)

$\underline{w = 1}$
$\underline{v = 6}$

Es gibt so viele Lösungen die die obige Gleichung erfüllen. Mit $w = 1$ finden wir für v die kleinste $\mathbb{N}$-Zahl!

Kontrolle siehe Rückseite

A7 a) Kurvendiskussion

f_a = Hyperbelfunktion

$f_a(x) = \frac{a}{x^n} + b$

Horizontale Asymptote $|x| \to \infty$; $\frac{a}{x^n} \to 0$

für $f_a(x)$ folgt $\underline{b = -2}$

Pol : $x = 0$ da $\frac{a}{0}$ = nicht definiert!

Wertepaare

$f_a(-2) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{a}{(-2)^n} - 2$

$f_a(2) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{a}{2^n} - 2$

$n \in \mathbb{N}$ - Zahlen + gerade!

$f_a(-1) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{a}{(-1)^n} - 2$

$f_a(1) = 2$

$2 = \frac{a}{1^n} - 2 \Rightarrow \underline{a = 4}$

$-1 = \frac{4}{2^n} - 2 \Rightarrow 1 = \frac{4}{2^n}$ $\underline{n} = \frac{\log 4}{\log 2} \underline{= 2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{f_a(x) = \frac{4}{x^2} - 2}}$ 1,25

Umkehrfunktion f_a^{-1}

$f_a(x) = \frac{4}{x^2} - 2 \Rightarrow y = \frac{4}{x^2} - 2$ $x \leftrightarrow y$

$x = \frac{4}{y^2} - 2$ nach y auflösen!

$y^2 = \frac{4}{x+2}$

$y = \sqrt{\frac{4}{x+2}}$ (Wurzelfunktion)

$\Rightarrow \underline{\underline{f_a^{-1} = \sqrt{\frac{4}{x+2}}}}$ 0,5

A8

$$f_1(x) = 1\frac{2}{3}x + \frac{5}{9} = \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}$$

a) Bestimmung von P_2, P_3

$$f_1(2) = \frac{5}{3}\cdot 2 + \frac{5}{9} = \frac{35}{9} = 3\frac{8}{9} \rightarrow P_2\left(2 / 3\tfrac{8}{9}\right)$$

$$f_1(-3) = \frac{5(-3)}{3} + \frac{5}{9} = -4\frac{4}{9} \rightarrow P_3\left(-3 / -4\tfrac{4}{9}\right)$$

$$f_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f_2(0) = -2\tfrac{7}{9} \Rightarrow c = -2\tfrac{7}{9}$$

Bestimmung von a, b über P_2, P_3

$$f_2(2) = a\cdot 4 + b\cdot 2 - 2\tfrac{7}{9} = 3\tfrac{8}{9}$$

$$4a + 2b = 6\tfrac{2}{3} \quad ①$$

$$f_2(-3) = a\cdot 9 + b(-3) - 2\tfrac{7}{9} = -4\tfrac{4}{9}$$

$$9a - 3b = -1\tfrac{2}{3} \quad ②$$

2x2 Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\frac{2}{3} \\ -1\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$x^2 + 4x - 5$$

$$f_2(x) = \frac{5}{9}x^2 + 2\frac{2}{9}x - 2\frac{7}{9}$$ (0,75)

$\Rightarrow$ HP48 $a = \frac{5}{9}$, $b = 2\frac{2}{9}$

b) Scheitelform

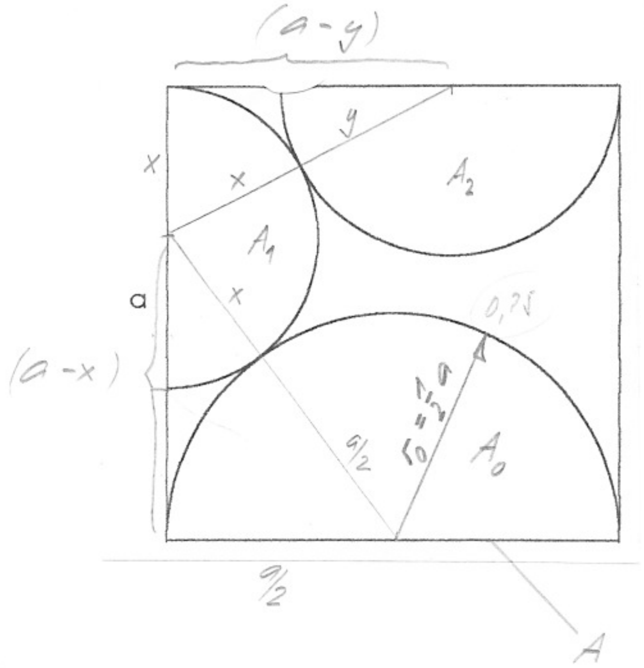
$$f_2(x) = \frac{5x^2}{9} + \frac{20}{9}x - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}(\underbrace{x^2 + 4x}_{(x+2)^2} - 5)$$

$$f_2(x) = \frac{5}{9}\left[(x+2)^2 - 4 - 5\right]$$

$$f_2(x) = \frac{5}{9}(x+2)^2 - \frac{5}{9}\cdot 9 \Rightarrow f_2(x) = \frac{5}{9}(x+2)^2 - 5$$ (0,75)

Scheitelpunkt aus Scheitelform lesen. $S(-2 / -5)$

A9



Pythagoras:

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-x)^2$$

$$\cancel{\frac{a^2}{4}} + ax + \cancel{x^2} = \cancel{\frac{a^2}{4}} + a^2 - 2ax + \cancel{x^2} \quad |:a$$

$$x = a - 2x$$

$$3x = a$$

$$\underline{x = \frac{1}{3}a} \quad 1$$

oder $\underline{\underline{r_1 = \frac{1}{3}a}}$ mit $r_1 = x$

$$(x+y)^2 = x^2 + (a-y)^2 \quad \text{mit } x = \frac{1}{3}a \text{ folgt}$$

$$\left(\frac{a}{3}+y\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + (a-y)^2$$

$$\cancel{\frac{a^2}{9}} + \frac{2}{3}ay + \cancel{y^2} = \cancel{\frac{a^2}{9}} + a^2 - 2ay + \cancel{y^2} \quad |:a$$

$$\frac{2}{3}y = a - 2y$$

$$\frac{8y}{3} = a \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{8}a \quad \text{mit } y = r_2$$

$$\underline{\underline{r_2 = \frac{3}{8}a}} \quad 1$$

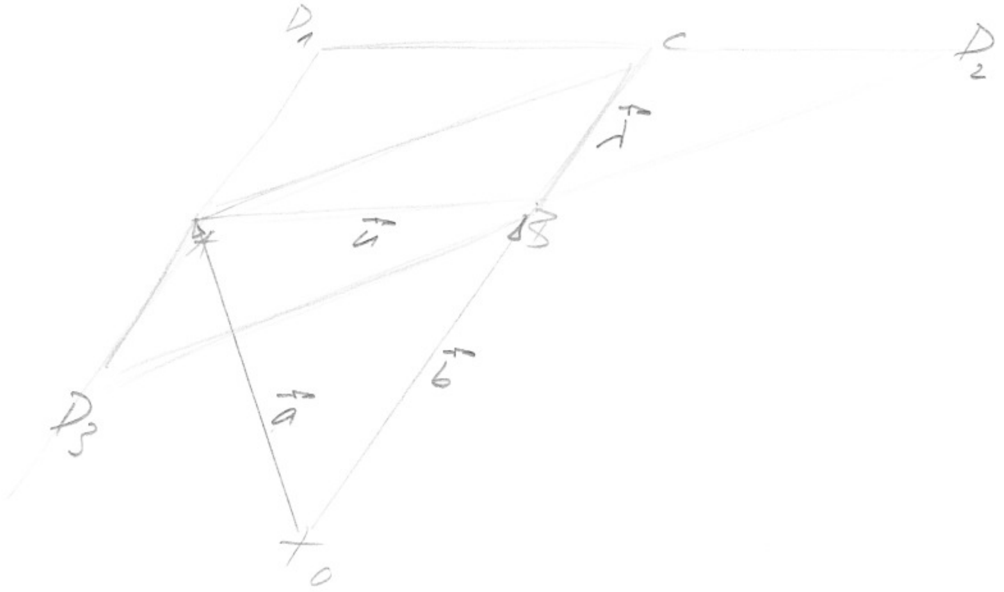
$$A = a^2 = 100\%$$

$$A_\Sigma = A_0 + A_1 + A_2 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi}{2} + \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2\pi}{2} + \frac{\left(\frac{3}{8}a\right)^2\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{9} + \frac{9a^2}{64}\right) = 0{,}788\,a^2$$

$$\underline{A_\Sigma} = \frac{0{,}788\,a^2 \cdot 100\%}{a^2} = \underline{\underline{78{,}8\%}} \quad 0{,}75$$

A10



$$\vec{u} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

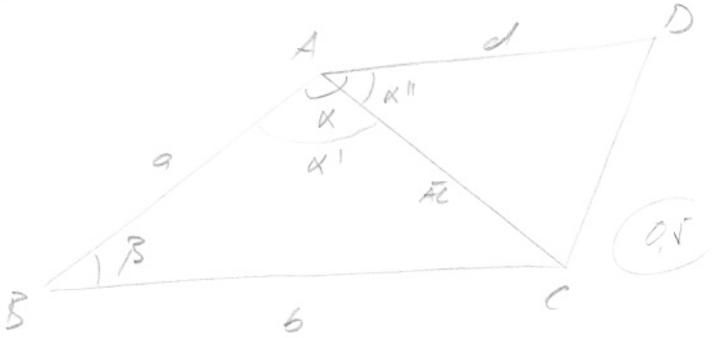
$$\vec{r} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D_1}} = \vec{c} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{D_2}} = \vec{c} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 16 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{D_3}} = \vec{a} - \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}}}$$

A11



$a = 9cm$

$b = 7{,}5cm$

$\beta = 35°$

$\alpha = 95°$

$d = 2cm$

Kosinussatz

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(9cm)^2 + (7{,}5cm)^2 - 2 \cdot 9cm \cdot 7{,}5cm \cdot \cos 35°} = 5{,}16cm$$

Sinussatz

0,75

$$\frac{b}{\sin\alpha'} = \frac{\overline{AC}}{\sin\beta} \Rightarrow \alpha' = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin\beta}{\overline{AC}}\right)$$

$$\alpha' = \arcsin\left(\frac{7{,}5cm \cdot \sin 35°}{5{,}16cm}\right)$$

1

$$\alpha' = 56{,}42°$$

$$\alpha'' = \alpha - \alpha' = 95° - 56{,}42° = 38{,}58°$$

Kosinussatz

$$\overline{CD}^2 = c^2 = \overline{AC}^2 + d^2 - 2\overline{AC}\,d \cdot \cos\alpha''$$

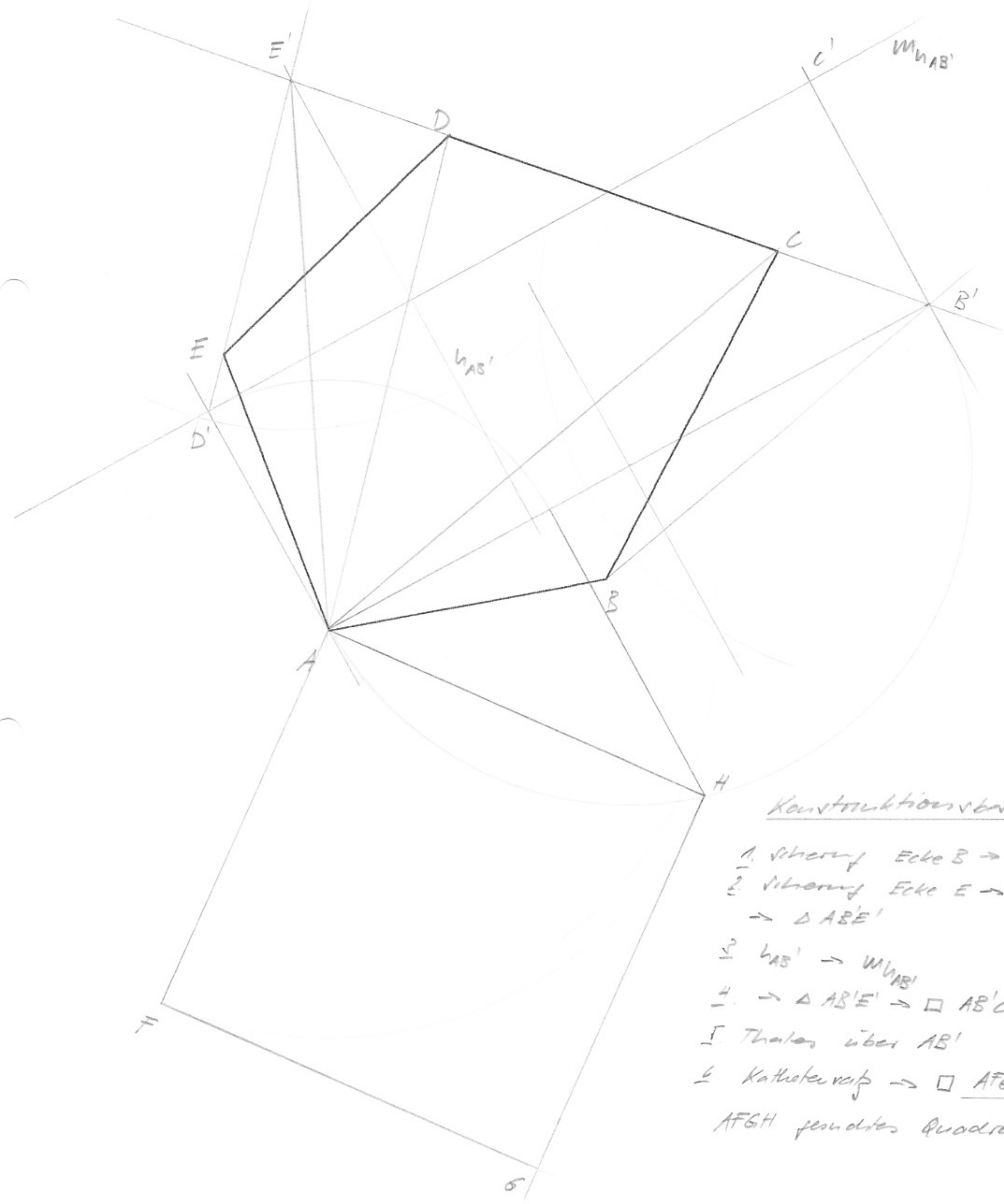
$$c = \sqrt{\overline{AC}^2 + d^2 - 2\overline{AC}\,d\cos\alpha''}$$

0,75

$$c = \sqrt{(5{,}16cm)^2 + (2cm)^2 - 2 \cdot 5{,}16cm \cdot 2cm \cdot \cos 38{,}58°}$$

$$c = 3{,}88cm$$

A12 Lösung



<u>Konstruktionsbeschrieb</u>

1. Scherung Ecke B → B'
2. Scherung Ecke E → E'
   → △ AB'E'
3. $h_{AB'}$ → $m_{h_{AB'}}$
4. → △ AB'E' → □ AB'C'D'
5. Thales über AB'
6. Kathetensatz → □ AFGH

AFGH gesuchtes Quadrat