Mathematik, Teil 1

Allgemeine Hinweise:

- Die Prüfungszeit beträgt 90 Minuten.
- Ausser den Schreib-, Zeichen- und Konstruktionsutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Alle Resultate müssen mit einem vollständigen, eindeutig nachvollziehbaren Lösungsweg belegt sein.
- Ungültige Lösungsansätze und Resultate sind deutlich durchzustreichen.
- Jede vollständig richtig gelöste Aufgabe wird mit zwei Punkten bewertet.
- Eine sauber und exakt dargestellte Prüfungsarbeit wird zusätzlich mit zwei Punkten bewertet.
- Für 22 der 32 möglichen Punkte wird die Note 6 erteilt.

Wenn nichts anderes angegeben ist, gilt: Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen (G = R)

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge: $$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}$$

2. Der folgende Ausdruck ist auf die Form x^k zu bringen:

$$\frac{\left(x^7\cdot\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{4}}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)^{-1}$$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge: $$\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}+\sqrt{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

4. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit $a+c=8cm$, $h_a=3cm$, $\beta=60^\circ$ und erstellen Sie einen Konstruktionsbericht!

5. Bestimmen Sie den grössten Wert für $x\in$ **Z**, welcher die Ungleichung

$$\frac{3x+1}{x+2}\geq\frac{3x-1}{x-6}$$

erfüllt.

6. Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.

$\vec{r}$ ist die Summe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Beurteilen Sie die nachfolgenden Gleichungen auf ihren Wahrheitsgehalt. Antworten: *Wahr (w), falsch (f).*

a) $r=7$	b) $\vec{r}=5$	c) $r=5$	d) $r=a+b$
e) $\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}$	f) $r=\vec{a}+\vec{b}$	g) $r=\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|$	h) $\left\|\vec{r}\right\|=\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|$

Bitte wenden!

7. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

a) $\sqrt[5]{x^3} = 27$ b) $\left(\sqrt[x]{27}\right)^5 = 243$ c) $log_8 x = \frac{5}{3}$ d) $x = log_2 0.25$

8. Das Polynom $P(x) = x^4 + x^2 + ax + b$ soll ohne Rest durch $(x^2 + 2x + b)$ teilbar sein. Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b.

9. Es gilt: **G** = **C** ($i^2 = -1$). Berechnen Sie

a) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6$ b) $\frac{(i+1)^3}{(1-i)^2}$

10. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\frac{\left[\frac{a^2}{b} + x\left(\frac{x}{b} - \frac{2a}{b}\right)\right] \cdot a \cdot c}{\frac{\left(\frac{c^2}{a} - \frac{c^2}{x}\right) \cdot a^2 \cdot x}{a \cdot c}} \cdot (a + x) = 0$$

11. Markieren Sie in einem Koordinatensystem *(x/y)* die durch das folgende Relationssystem bestimmte Punktmenge:

$$(-3 \le x + y \le 3) \wedge (y \ge -2) \wedge (y - x \le 5)$$

12. Ein Dreieck *ABC* ist gegeben durch $a = 6\ m$, $b = 10\ m$ und $\gamma = 120^\circ$. Berechnen Sie die Seite c und die Fläche A des Dreiecks.

13. Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle Vektoren, die senkrecht zum Vektor $\vec{a}$ stehen und die Länge 1 haben.

14. Bestimmen Sie die Lösungsmenge: $ln\sqrt{x} = \sqrt{ln(x)}$

15. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$y = x^2 - |4x - 4|$$

im Intervall $-5 \le x \le 4$.

Bitte wenden!

Lösungen

	Pte

1.

$$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} \qquad \Big| \; D = G \setminus \{-1;1\}$$

$$\frac{[(x+1)^2-(x-1)^2]\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(x-1-x-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4x}{-2\;(x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$4x = -x-1$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{1}{5} \in D}}$$

2

2.

$$\frac{(x^7\sqrt{x})^{1/6}}{x^{1/4}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\left(x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)^{-1} =$$

$$x^{(7+\frac{1}{2})\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cancel{\sqrt{x+1}}\left(\frac{x\cancel{\sqrt{x+1}}}{x}\right)^{-1} = x^{\frac{15-3}{12}-\frac{1}{2}} \underline{\underline{= x^{\frac{1}{2}}}}$$

2

3.

$$\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}+\sqrt{x-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \qquad \Big| \; D = R^{\geq\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 0.707$$

$$x+\frac{1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}+x-\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

$$2x+2\sqrt{x^2-\frac{1}{2}} = 2$$

$$x^2-\frac{1}{2} = (1-x)^2$$

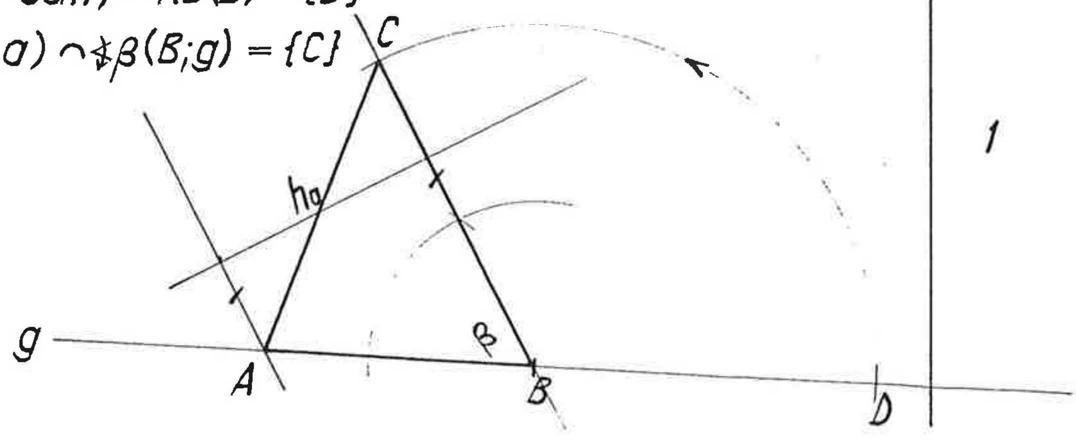
$$2x = \frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3}{4} \in D}} \;;\; \text{CHECK in BG} \; ☺\,!$$

2

4. <u>K'Bericht</u> 1

1. $B \in g$
2. $\parallel (\sphericalangle\beta(B;g) = |60°|; h_a = 3cm) \cap g = \{A\}$
3. $\odot(A; a+c = 8cm) \cap AB(B) = \{D\}$
4. $\odot(B; \overline{BD} = a) \cap \sphericalangle\beta(B;g) = \{C\}$
5. ΔABC



1

	Pte

5.

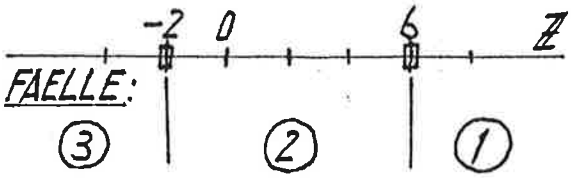
$$\frac{3x+1}{x+2} \geqslant \frac{3x-1}{x-6} \quad \Big| \; \mathbb{D} = \mathbb{Z} \setminus \{-2;6\};\; x_{max} = ?$$

$$\frac{(x-6)(3x+1)-(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x-6)} \geqslant 0$$

$$\frac{3x^2-17x-6-3x^2-5x+2}{HN} \geqslant 0$$

$$\frac{-22x-4}{HN} \geqslant 0$$

$$\boxed{\frac{11x+2}{HN} \leqslant 0}$$



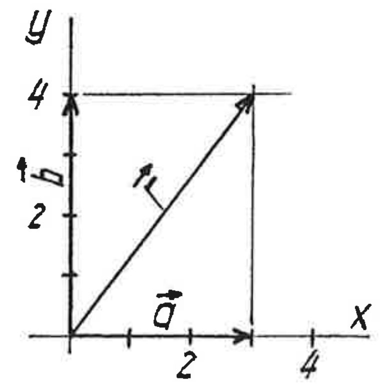
FAELLE:

1 $\underline{HN>0}$ $\longrightarrow$ $\underline{x \leqslant -\frac{2}{11}}$ $\xrightarrow[\text{IN } 1]{\text{CHECK}}$ $\underline{L_1 = \{\ \}}$

2 $\underline{HN<0}$ $\longrightarrow$ $\underline{x \geqslant -\frac{2}{11}}$ $\xrightarrow[\text{IN } 2]{\text{CHECK}}$ $\underline{L_2 = \{0;1;2;3;4;5\}}$

$\underline{L_{1;2}} \rhd$ $\quad \underline{\underline{x_{max} = 5}}$ — 2

6.



a. f b. f c. w d. f

e. w f. f g. w h. f

a…h. 0.25

7.a. $\sqrt[5]{x^3} = 27$

$x^3 = 27^5 = 27^3 \cdot 27 \cdot 27$

$\underline{\underline{x}} = 27 \cdot 3 \cdot 3 \; \underline{\underline{= 243}}$

b. $(\sqrt[x]{27})^5 = 243 = 3^5$

$\therefore \; \underline{\underline{x = 3}}$

(1)

c. $\log_8 x = \frac{5}{3}$

$\therefore \; x = 8^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5$

$\underline{\underline{x = 32}}$

d. $x = \log_2 0.25$

$\therefore \; 2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2}$

$\therefore \; \underline{\underline{x = -2}}$

2

---

8. $(x^4 + x^2 + ax + b) : (x^2 + 2x + b) = x^2 - 2x + 5 - b$ — (1)

$$\begin{aligned}
&-(x^4 + 2x^3 + bx^2) \\
&\quad -2x^3 + x^2(1-b) + ax + b \\
&\quad -(-2x^3 - 4x^2 \qquad -2bx) \\
&\qquad x^2(5-b) + x(a+2b) + b \\
&\qquad -[x^2(5-b) + x(10-2b) + b(5-b)] \\
&\qquad\qquad x\underbrace{(a+4b-10)}_{T_1=0} + \underbrace{b(b-4)}_{T_2=0} = 0 \text{ ; d.h. \underline{KEIN} Rest!}
\end{aligned}$$

$T_1 = 0 \;\wedge\; T_2 = 0 \;!$

Pte

8. Forts

T_1: $a+4b-10 = 0$ $\qquad$ T_2: $b(b-4)=0$

$a = 10-4b$ $\qquad$ $\therefore\ \underline{\underline{b_{1;2} = 0;\,4}}$

$\xrightarrow{b_{1;2}}$ $\underline{\underline{a_{1;2} = 10;\,-6}}$

$\xrightarrow[b_{1;2}]{a_{1;2}}$ $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(a/b)\,|\,(10/0);\,(-6/4)\}}}$ $\qquad$ 2

9.a. $1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6 =$

$1+i+(-1)-i+1+i-1 \quad \underline{\underline{= i}}$ $\qquad$ 1

b. $\dfrac{(i+1)^3}{(1-i)^2} = \dfrac{i^3+3i^2+3i+1}{1-2i+i^2} = \dfrac{-i-3+3i+1}{1-2i-1} = \dfrac{2i-2}{-2i}$

$= -1+\dfrac{1}{i} \ \underline{= -1-i} \ \underline{\underline{= -(i+1)}}$ $\qquad$ 1

10.

$$\underbrace{\frac{\left[\frac{a^2}{b}+x\left(\frac{x}{b}-\frac{2a}{b}\right)\right]ac}{\frac{\left(\frac{c^2}{a}-\frac{c^2}{x}\right)a^2x}{ac}}}_{F_1}\underbrace{(a+x)}_{F_2} = 0 \qquad \Big|\ \underline{\underline{\mathbb{D} = \mathbb{G}\setminus\{0;a\}}}$$ $\qquad$ (1)

$\underline{F_{1;2} = 0 \text{ setzen:}}$

$$\frac{a^2c^2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{x(x-2a)}{b}\right)}{\frac{c^2(x-a)a^2x}{ax}} = 0$$

$$\frac{a(x^2-2ax+a^2)}{b(x-a)} = 0$$

$$(x-a) = 0$$

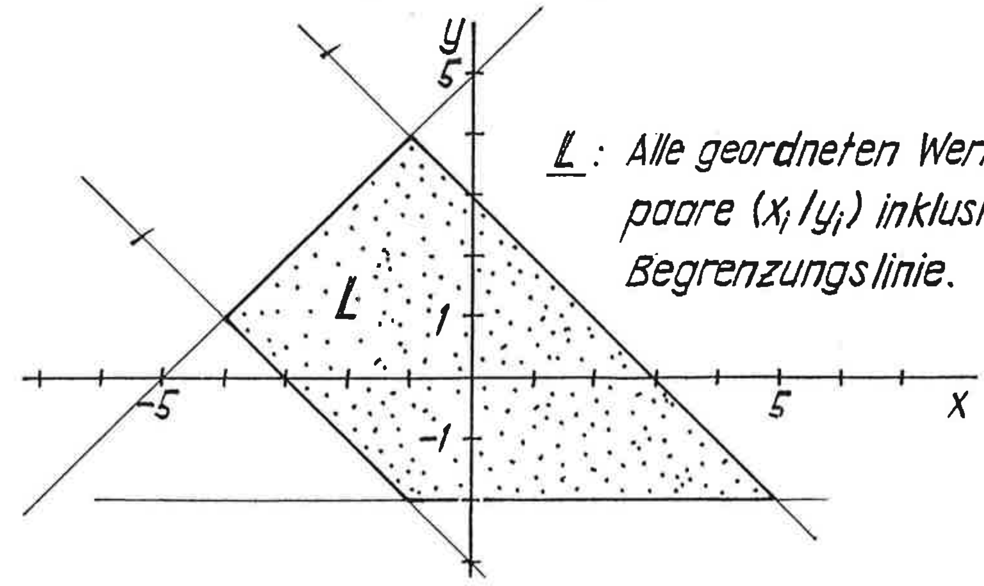
$$\underline{x = a \notin \mathbb{D}}$$

$$a+x = 0$$

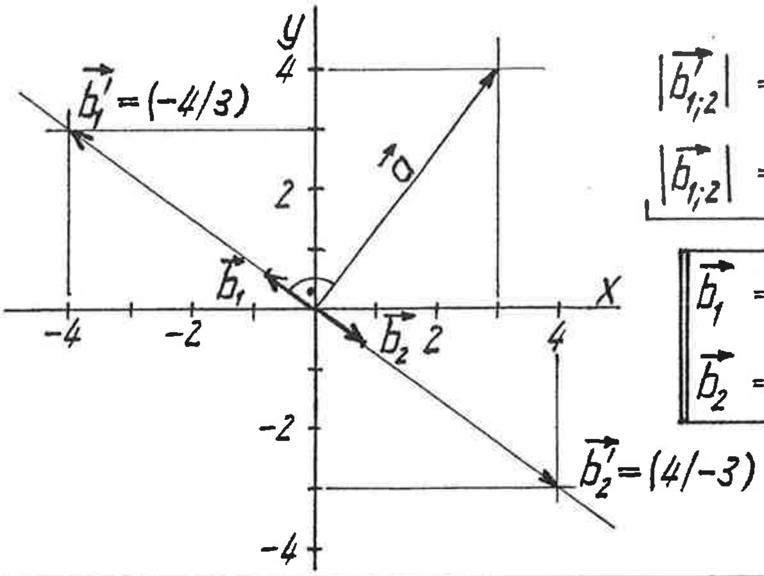
$$\underline{\underline{x = -a}}$$ $\qquad$ 2

---

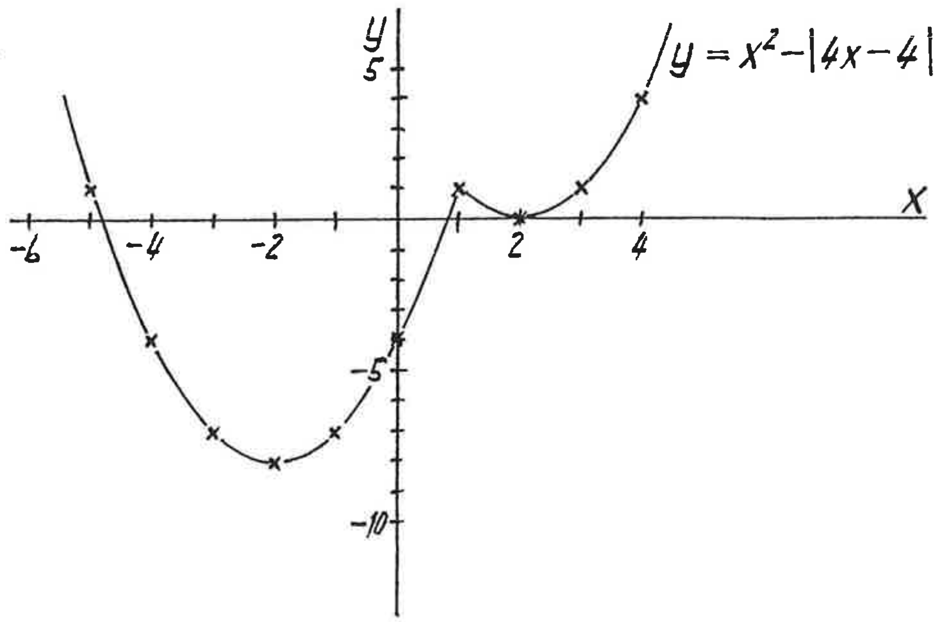
11. $(-3 \leqslant x+y \leqslant 3) \wedge (y \geqslant -2) \wedge (y-x \leqslant 5)$



$\underline{\mathbb{L}}$: Alle geordneten Wertepaare (x_i/y_i) inklusive Begrenzungslinie. $\qquad$ 2

		Pte
12.	$A_\Delta = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}\, 6 \cdot 10 \cdot \underbrace{\sin 120°}_{\sqrt{3}/2}\ [m^2]$	
	$\underline{\underline{A_\Delta = 15 \cdot \sqrt{3}\ m^2}}$	1
	$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma} = \sqrt{6^2+10^2-2\cdot 6\cdot 10\cdot \cos 120°}\ [\sqrt{m^2}]$	
	$\underline{\underline{c = 14\ m}}$	1
13.	 $\lvert\vec{b}_{1;2}'\rvert = \sqrt{16+9} = 5$ $\underbrace{\lvert\vec{b}_{1;2}\rvert = 1}$ $\boxed{\vec{b}_1 = \left(\frac{-4}{5} / \frac{3}{5}\right)}$ $\boxed{\vec{b}_2 = \left(\frac{4}{5} / \frac{-3}{5}\right)}$	1 1
14.	$\ln\sqrt{x} = \sqrt{\ln(x)}$ $(\frac{1}{2}\ln x)^2 = \ln x$ $(\ln x)^2 = 4\ln x$ $\ln x(\ln x - 4) = 0$ $\therefore\ \underline{\underline{x_{1;2} = 1\,;\,e^4}}$ oder $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{x \mid 1\,;\,e^4\}}}$	2
15.	$x \longrightarrow y = x^2 - \lvert 4x-4\rvert$	

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	1	−4	−7	−8	−7	−4	1	0	1	4



2