Mathematik, Teil 2

Allgemeine Hinweise:
- Die Prüfungszeit beträgt 150 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: -Taschenrechner
  -Tabellen- und Formelsammlungen ohne Lösungsbeispiele
  - Schreib-, Zeichen- und Konstruktionsutensillien
- Alle Resultate müssen mit einem vollständigen, eindeutig nachvollziehbaren Lösungsweg belegt sein.
- Ungültige Lösungsansätze und Resultate sind deutlich durchzustreichen.
- Die Bewertungspunkte für die vollständig richtige Lösung sind bei jeder Aufgabe angegeben.
- Eine sauber und exakt dargestellte Prüfungsarbeit wird zusätzlich mit zwei Punkten bewertet.
- Für 20 der 30 möglichen Punkte wird die Note 6 erteilt.

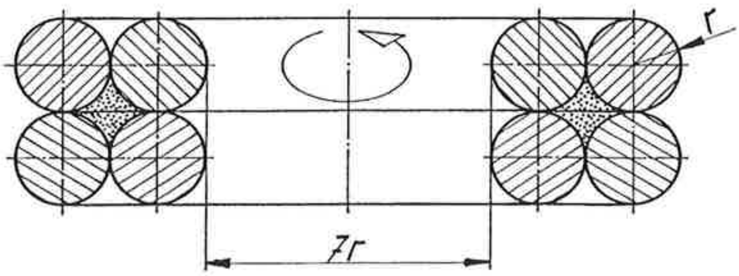
Wenn nichts anderes angegeben ist, gilt: Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen (G = R).

1. In einem Lager befinden sich drei Behälter mit Drehteilen:

	Typ A	*Typ B*	*Typ C*	*Masse*
Behälter 1	4	6	5	191 g
Behälter 2	5	7	3	177 g
Behälter 3	8	5	8	257 g

Bestimmen Sie die Masse der einzelnen Drehteile. 2 P

2. Der Hohlraum zwischen den vier Ringen wird mit Klebstoff gefüllt. Formulieren Sie mit dem Radius *r* exakt:
a) Das Volumen des Klebstoffes
b) Die Oberfläche des Verbundkörpers



2 P

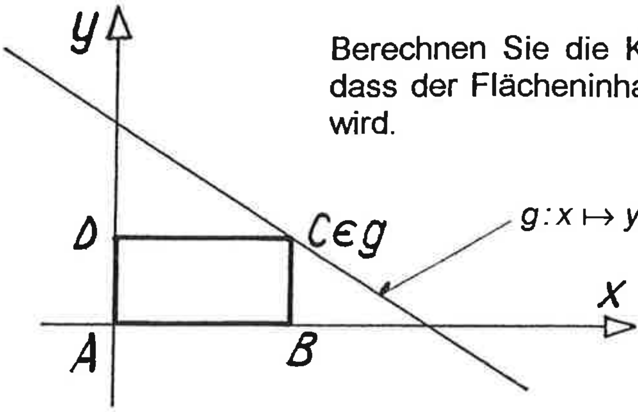
3. Die Abnahme des Luftdrucks mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel gehorcht annähernd einem Gesetz der Form $y = a \cdot 3^{-kx}$.

Dabei ist *y* der Luftdruck [$Pa = N/m^2$] in der Höhe *x* [*m*] über dem Meeresspiegel. An einem Tag beträgt der Luftdruck in Meereshöhe $1.013 \cdot 10^5\ Pa$, in Aarau (*380 m* über dem Meeresspiegel) dagegen nur $9.623 \cdot 10^4\ Pa$.

Bestimmen Sie aus diesen Angaben den momentanen Luftdruck in Zermatt (*1620 m* über dem Meeresspiegel) auf drei signifikante Ziffern genau.

2 P

4.



Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C so, dass der Flächeninhalt des Rechteckes ABCD maximal wird.

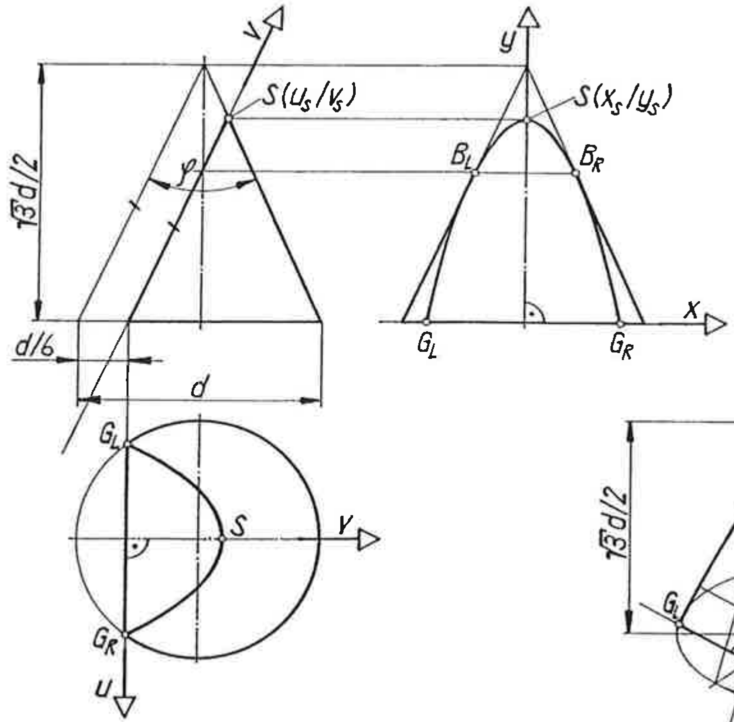
$$g: x \mapsto y = -\frac{6}{5}x + 4$$

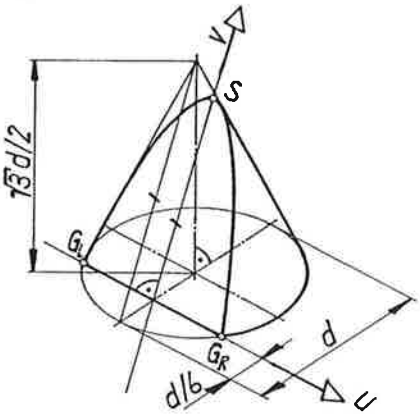
2 P

5. Ein Wasserreservoir kann durch zwei Pumpen gefüllt werden. Die erste füllt das leere Reservoir in 8.5 Stunden, die zweite benötigt dafür 6 Stunden.
Nach welcher Zeit ist das leere Reservoir aufgefüllt, wenn die zweite Pumpe eine Stunde nach der ersten eingeschaltet wird? Rechnerische oder graphische Lösung.

2 P

6.





Formulieren Sie mit dem Basisdurchmesser d exakt!

a) Berechnen Sie den Kegelspitzenwinkel φ in [°].
b) Berechnen Sie den Scheitel S der Kegelschnittparabel bezüglich der
   -Schnittebene (u/v): $S(u_s/v_s)$,
   -Seitenrissebene (x/y): $S(x_s/y_s)$.
c) Berechnen Sie die Lage der Parabelpunkte G_L und G_R.
d) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der effektiven Schnittparabel (u/v) in der Scheitelform $u \mapsto v = m(u-u_s)^2 + v_s$.
e) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Schnittparabel im Seitenriss (x/y) in der allgemeinen Form $x \mapsto y = ax^2 + bx + c$.
f) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_L und B_R bezüglich der Seitenrissebene (x/y).

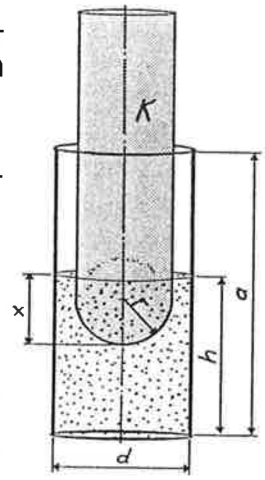
6 P

7. Gegeben sind folgende Funktionen: $f: x \mapsto y = 10\cos(x)$
$h: x \mapsto y = 10\sin(2x)$

a) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen im Intervall $0 \leq x \leq 180°$.
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Graphen.

3 P

8. Der gezeichnete zylinderförmige Körper K ist unten halbkugelförmig. Er wird in einen zur Hälfte mit Wasser gefüllten Glaszylinder eingetaucht.



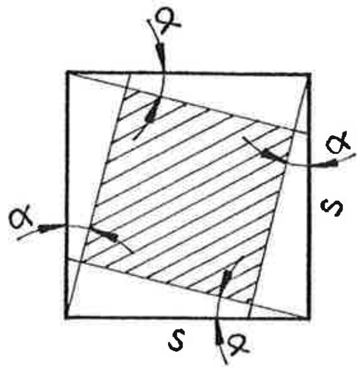
a) Geben Sie die Füllstandshöhe h als Funktion der Eintauchtiefe x an.

$h_1(x)$ für den Definitionsbereich $D_1 = [0; r]$ und
$h_2(x)$ für den Definitionsbereich $D_2 = [r; 3r]$.

b) Zeichnen Sie die Funktion $h(x)$ in ein Koordinatensystem (x/h) für das Intervall $0 \leq x \leq 5cm$, wenn $a = 10cm$, $d = 4{,}5cm$ und $r = 2cm$ betragen.

3 P

9. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge s.



a) Formulieren Sie die schraffierte Fläche in Abhängigkeit von s und α.

b) Stellen Sie die Fläche als Graphen einer Funktion des Winkels im Intervall $0 \leq \alpha \leq 90°$ unter der Annahme $s = 1$ dar.

c) Für welche(n) Winkel α ist die schraffierte Fläche halb so gross wie die Fläche des grossen Quadrates.

4 P

10. Beim Kegeln sollen mit einem Kugelschub möglichst alle neun Kegel zu Fall gebracht werden.

a) Wie viele Wurfbilder mit drei stehen gebliebenen Kegeln gibt es?
b) Wie viele Wurfbilder mit vier gefallenen Kegeln sind möglich?
c) Wie gross ist die Gesamtzahl der möglichen Wurfbilder?
d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, mit einem Kugelschub sieben der neun Kegel umzuwerfen?

2 P

Lösungen | Pte

1.

$$4m_A + 6m_B + 5m_C = 191 \quad 1)$$
$$5m_A + 7m_B + 3m_C = 177 \quad 2)$$
$$8m_A + 5m_B + 8m_C = 257 \quad 3)$$

Formuliert in [g]! $m_{A;B;C} = \ldots$! (0.5)

$\underline{1)+2)-3)}$ $\quad m_A + 8m_B = 111$

$$\underline{m_A = 111 - 8m_B} \quad 4)$$

$\underline{2)-1)}$ $\quad m_A + m_B - 2m_C = -14$

$$\underline{m_C = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B) + 7} \quad 5)$$

$\underline{4)\wedge 5) \text{ in } 1)}$ $\quad 444 - 32m_B + 6m_B + \frac{5}{2}(111 - 8m_B + m_B) + 35 = 191$

System aufstell

$$-26m_B - 17.5m_B = 191 - 444 - \tfrac{1}{2}\cdot 555 - 35$$
$$-43.5m_B = -565.5$$

$$\underline{m_B = 13} \quad (1)$$

$\underline{m_B \text{ in } 4)}$ $\quad \underline{\underline{m_A = 7}}$ $\quad \underline{\underline{L = \{(m_A/m_B/m_C)\,[g] \mid (7/13/17)\}}}$ (1.5)

$\underline{m_A \wedge m_B \text{ in } 5)}$ $\quad \underline{\underline{m_C = 17}}$ 2

---

2. a. $V = A_{rot}\,\pi\, d_S$
$$= (4r^2 - \pi r^2)\pi \cdot 11r$$
$$\underline{\underline{V = 11\pi(4-\pi)r^3}}$$

b. $A_0 = \pi d_S l_M$
$$= \pi \cdot 11r(3\pi 2r)$$
$$\underline{\underline{A_0 = 66\pi^2 r^2}}$$

a. 1
b. 1

---

3. $\underline{\text{Allgemein gilt}}$: $\quad y = a \cdot 3^{-kx}$, wobei $y; a\,[Pa], x\,[m], k\,[m^{-1}]$

$\underline{\text{Meereshöhe}}$: $\quad 1.013 \cdot 10^5 = a \cdot 3^{-k\cdot 0}$

$$\therefore \quad \underline{a = 1.013 \cdot 10^5} \quad 0.5$$

$\underline{\text{Aarau}}$: $\quad 9.623 \cdot 10^4 = 1.013 \cdot 10^5 \cdot 3^{-k\cdot 380}$

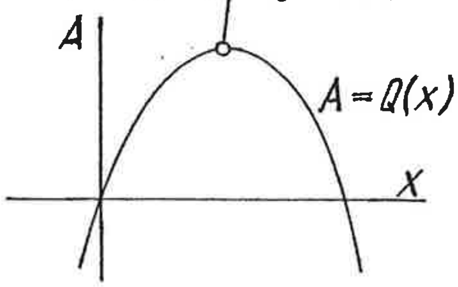
$$\lg 9.499'506 \cdot 10^{-1} = -380k \cdot \lg 3$$

$$\therefore \quad \underline{k = 1.229'907 \cdot 10^{-4}} \quad 1$$

$\underline{\text{Zermatt}}$: $\quad p_{bZ} = y_Z = 1.013 \cdot 10^5 \cdot 3^{-1.229'907 \cdot 10^{-4} \cdot 1'620}$ [Pa]

$$\underline{p_{bZ}} = 8.138'5 \cdot 10^4\,Pa \approx \underline{\underline{0.814\text{ bar}}} \quad 0.5$$

		Pte
4.	$A = xy \quad \vert \quad y = -\frac{6}{5}x+4$	
	$A = x\left(-\frac{6}{5}x+4\right) = Q(x) \longrightarrow$ SCHEITEL (x_c/A_{max})!	(0.5)
	$\underline{x_c} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4\cdot 5}{2(-6)} = \underline{\frac{5}{3}}$	(1)
	$\underline{y_c} = -\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}+4 = \underline{2}$	✓
	$\underline{x_c/y_c} \rightarrow \underline{\underline{C\left(\frac{5}{3}/2\right)}}$	2



---

5. RECHNERISCH:

$t_1 = 8.5h$

$t_2 = 6\ h$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{V}_1 = \frac{V}{t_1}\\ \dot{V}_2 = \frac{V}{t_2}\end{array}\right] - \dot{V}_{tot} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = V\frac{t_1+t_2}{t_1 t_2} \qquad (0.5)$$

Situation $\longrightarrow$ $V = t_V\cdot\dot{V}_1 + \Delta t\cdot\dot{V}_{tot} \qquad \vert\ t_V = 1h$

$$V = t_V\frac{V}{t_1} + \Delta t\frac{t_1+t_2}{t_1 t_2}V$$

$$1 = \frac{t_V}{t_1} + \Delta t\frac{t_1+t_2}{t_1 t_2}$$

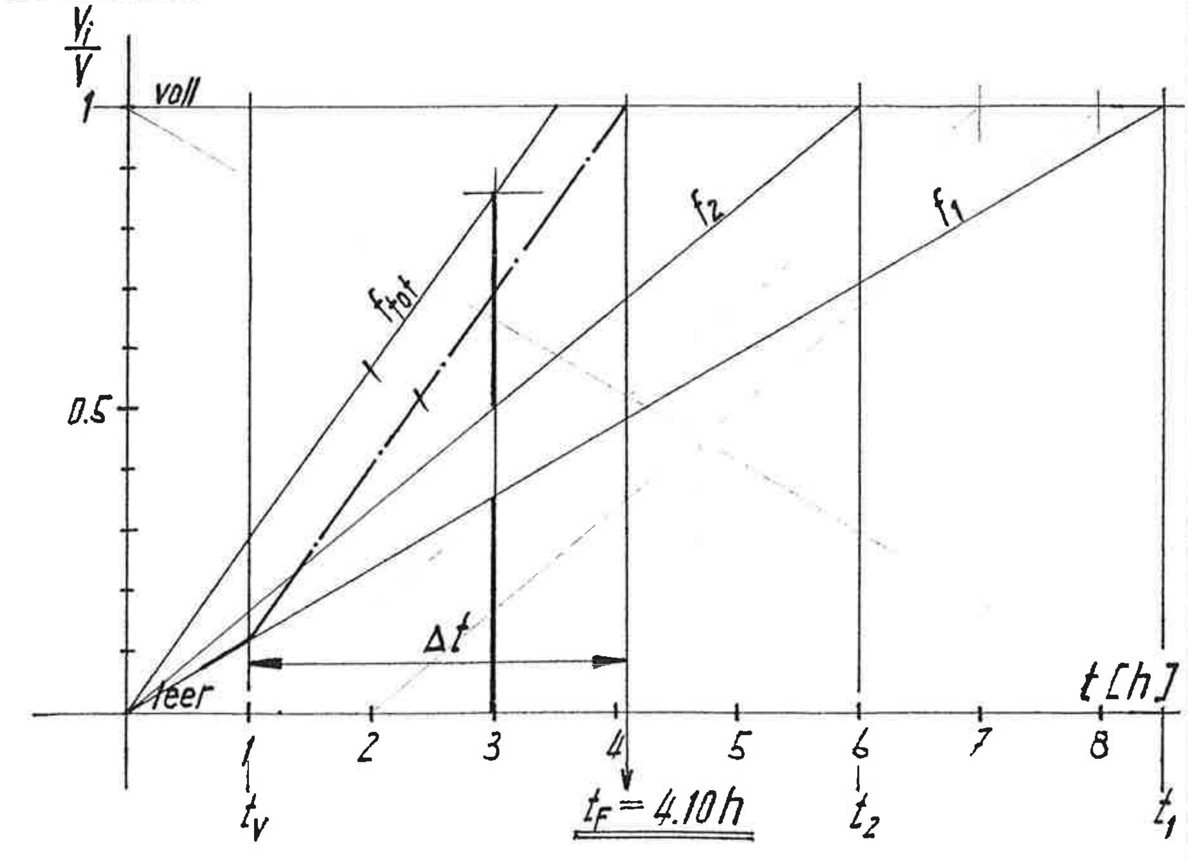
$$\Delta t = \frac{t_1-t_V}{\cancel{t_1}}\cdot\frac{\cancel{t_1}t_2}{t_1+t_2} = t_2\frac{t_1-t_V}{t_1+t_2} = 6\ \frac{8.5-1}{8.5+6}\ [h]$$

$\underline{\Delta t = 3.103\ h}$ (1)

$\underline{t_F} = t_V + \Delta t = 1 + 3.103\ [h] = \underline{4.103h}$

$\underline{\underline{t_F \approx 4h\ 6\ min}}$ 2

GRAFISCH:



$f_1; f_2$: 0.5
$\wedge f_{tot}$: 1

sonst (-1/2)

(Toleranz ± 5 min)

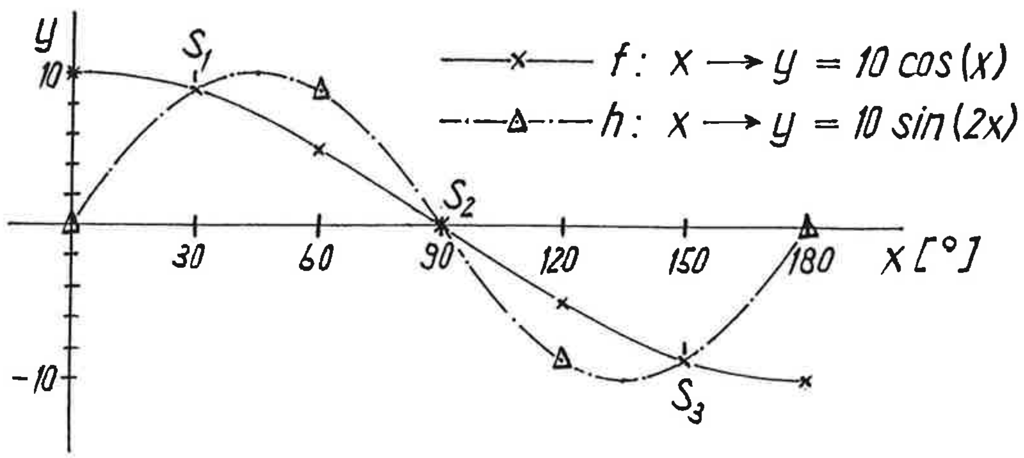
2

nicht exakt num. Resultate $(\frac{1}{2}\cdot P) \to *$

		Pte
6. a.	$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{d\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}\,d} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \underline{\underline{\varphi = 60^\circ}}$	1
b.	$\varphi \longrightarrow$ • Schnittebene (u/v): $\underline{\underline{S\left(u_s = 0 \,/\, v_s = \frac{5}{6}d\right)}}$	0.5 *
	• Seitenrissebene (x/y): $\underline{\underline{S\left(x_s = 0 \,/\, y_s = \frac{5}{12}\sqrt{3}\,d\right)}}$	0.5 *
c.	$u_{L;R} = x_{L;R} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2 - \left(\frac{1}{3}d\right)^2} = \pm d\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{6}\sqrt{5}\,d$	
	Bezüglich u/v- und x/y-Ebene: $\underline{\underline{G_L\left(-\frac{1}{6}\sqrt{5}\,d/0\right)}}$; $\underline{\underline{G_R\left(\frac{1}{6}\sqrt{5}\,d/0\right)}}$	1 *
d.	$u \longrightarrow v = m(u-u_s)^2 + v_s \quad \mid u_s = 0;\; v_s = \frac{5}{6}d$	
	$G_{L;R}$: $0 = m u_R^2 + v_s \quad \therefore m = -\frac{v_s}{u_R^2} = -\frac{5d\cdot 36}{6\cdot 5d^2} = -\frac{6}{d}$	
	$\underline{\underline{u \longrightarrow v = -\frac{6}{d}u^2 + \frac{5}{6}d}}$	1 *
e.	$x \longrightarrow y = ax^2 + bx + c \quad \mid b = 0;\; c = y_s = \frac{5}{12}\sqrt{3}\,d$	
	$G_{L;R}$: $0 = a x_R^2 + y_s \quad \therefore a = -\frac{y_s}{x_R^2} = -\frac{5\sqrt{3}\,d\cdot 36}{12\cdot 5d^2} = -\frac{3\sqrt{3}}{d}$	
	$\underline{\underline{x \longrightarrow y = -\frac{3\sqrt{3}}{d}x^2 + \frac{5}{12}\sqrt{3}\,d}}$	1 *
f.	"Aehnliche Δe" $\longrightarrow$ $y_{L;R} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}d = \frac{\sqrt{3}}{3}d$	
	$x_L = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}d = \frac{-1}{6}d$; $x_R = \frac{1}{6}d$	
	$\xrightarrow{(x/y)_{L;R}}$ $\underline{\underline{B_L\left(-\frac{1}{6}d/\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)}}$; $\underline{\underline{B_R\left(\frac{1}{6}d/\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)}}$	1 *

7. a.

$x\,[^\circ]$	0	30	60	90	120	150	180
y_f	10	8.66	5	0	−5	−8.66	−10
y_h	0	8.66	8.66	0	−8.66	−8.66	0



1

1 richtig $(\frac{1}{2})$

7. b. Schnittbedingung: $y_f = y_h$ | Pte

$$10\cos(x) = 10\sin(2x)$$
$$\sin(2x) - \cos(x) = 0$$
$$2\sin(x)\cos(x) - \cos(x) = 0$$
$$\cos(x)[2\sin(x) - 1] = 0 \qquad (1)$$
$$F_{1;2} = 0 \rightarrow \quad \cos(x) = 0$$
$$\therefore \quad \underline{x_{1;2} = 90°;\ 270° \notin \mathbb{L}}\ ;\ \underline{y_1 = 0}$$
$$\sin(x) = \frac{1}{2} \qquad (1\tfrac{1}{2}P)$$
$$\therefore \quad \underline{x_{3;4} = 30°;\ 150°}\ ; \qquad \underline{y_{3;4} = 5\sqrt{3};\ -5\sqrt{3}}$$

bei 2 vom 3

$$\underline{\underline{f \cap h \text{ im } [0;180°] = \{S_1(30°/5\sqrt{3});\ S_2(90°/0);\ S_3(150°/-5\sqrt{3})\}}} \qquad 2$$

---

8. a.

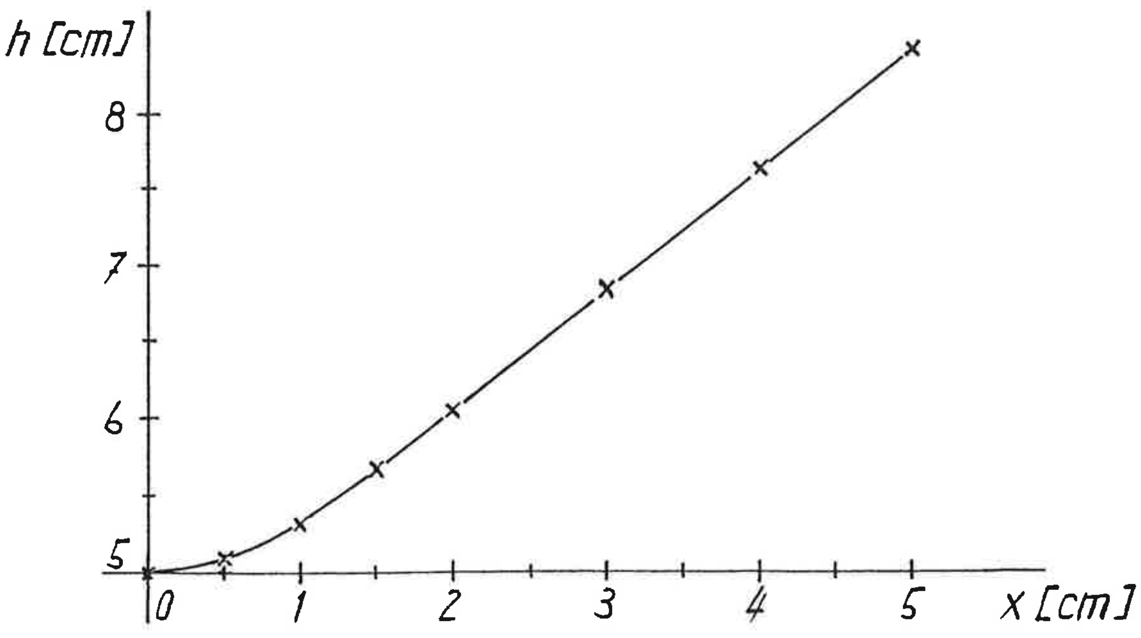
$$\underline{\underline{h_1(x)}} = \frac{a}{2} + \frac{\frac{\pi}{3}x^2(3r-x)}{\frac{\pi}{4}d^2} = \underline{\underline{\frac{a}{2} + \frac{4}{3}(3r-x)\frac{x^2}{d^2}}} \ \underline{\text{für } [0;r]} \qquad 1$$

$$h_2(x) = h_1(r) + \frac{\pi r^2(x-r)}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{a}{2} + \frac{4}{3}\cdot 2r\cdot\frac{r^2}{d^2} + 4(x-r)\frac{r^2}{d^2}$$
$$= \frac{a}{2} + \frac{r^2}{d^2}\left(\frac{8}{3}r + 4x - 4r\right)$$

$$\underline{\underline{h_2(x) = \frac{a}{2} + 4\left(x - \frac{r}{3}\right)\frac{r^2}{d^2}}} \ \underline{\text{für } [r;3r]} \qquad 1$$

b. $a = 10\,cm;\ d = 4.5\,cm;\ r = 2\,cm;\ 0 \leq x \leq 5\,cm$

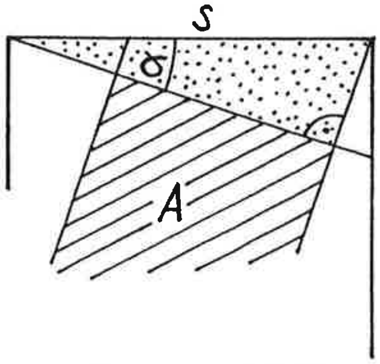
x [cm]	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5
h [cm]	5	5.09	5.33	5.67	6.05	6.84	7.63	8.42



1

	Pte

9\. a.



$$A = s^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\, s\cdot\sin\alpha\cdot s\cdot\cos\alpha$$

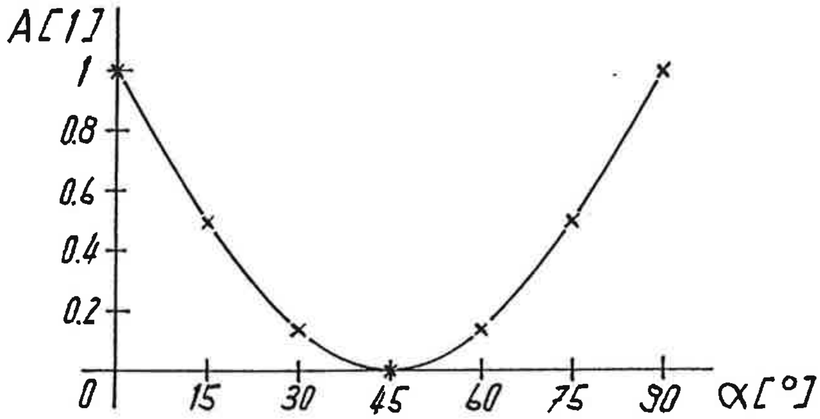
$$\underline{\underline{A = s^2(1-2\sin\alpha\cos\alpha)}}$$

<u>ODER</u> mit $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$:

$$\underline{\underline{A = s^2(1-\sin 2\alpha)}}$$ 1

b. $s = 1 \longrightarrow A(\alpha) = 1-\sin 2\alpha$ für $0 \leq \alpha \leq 90°$

α [°]	15	30	45	60	75	90	0
A [1]	0.5	0.134	0	0.134	0.5	1	1



1

c. $$s^2(1-\sin 2\alpha) = \frac{1}{2}s^2$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \qquad \Big|\ \text{Subst } 2\alpha = x$$ (1)✓

$$\therefore \quad x_{1;2} = \underset{(1/2)}{30°}\,;\ \underset{(1/2)}{150°}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{\alpha_{1;2} = 15°\,;\ 75°}}$$ 1

10\. a. $$\underline{\underline{C(9,6)}} = \frac{9!}{3!\,6!} = \underline{\underline{84}}$$ 0.5

mehrfach stehen gefallen ↑

b. $$\underline{\underline{C(9,4)}} = \frac{9!}{5!\,4!} = \underline{\underline{126}}$$ 0.5

2 Merkmale n

9 Plätze k

c. $$Z_W = \sum_{i=0}^{9} C_i(9,i) \qquad \overline{V}(k,n) = 2^9$$

$$= \underbrace{\frac{9!}{9!\,0!}}_{1} + \frac{9!}{1!\,8!} + \frac{9!}{2!\,7!} + \frac{9!}{3!\,6!} + \frac{9!}{4!\,5!} + \frac{9!}{5!\,4!} + \frac{9!}{6!\,3!} + \frac{9!}{7!\,2!} + \frac{9!}{8!\,1!} + \underbrace{\frac{9!}{9!\,0!}}_{1}$$

$$= 2\left(1 + \frac{9!}{1!\,8!} + \frac{9!}{2!\,7!} + \frac{9!}{3!\,6!} + \frac{9!}{4!\,5!}\right) = 2(1+9+36+84+126)$$

$$\underline{\underline{Z_W = 512}}$$ 0.5

d. $$\underline{\underline{P}} = \frac{C(9,7)}{Z_W} = \frac{9!}{2!\,7!\,512} = \underline{\underline{0.070'312'5 \approx 7.03\,\%}}$$ 0.5