1 Arbeitsauftrag:

Umfang $12 \cdot 15 \cdot 20 = 3600\,h$ 0,5P

Spezialwochen: 3/4/5:

Umfang $4 \cdot 15 \cdot 3 = 180\,h$ 0,5P

Intensivwochen:

x = Anzahl Intensivwoche

Umfang $14 \cdot 20 \cdot x$

0,5

Bilanz

1

$$12 \cdot 15\,(17 - x) + 14 \cdot 20 \cdot x = (3600 - 180)$$

$$12 \cdot 15 \cdot 17 - 12 \cdot 15x + 14 \cdot 20x = 3420$$

$$3060 - 180x + 280x = 3420$$

$$100x = 360$$

0,5

$$\boxed{x = 3{,}6}$$

$\Rightarrow$ Es sind 4 Intensivwochen nötig!

2

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{4}{2x-y} - \dfrac{5}{x-2y} = 6 \\[2ex] \dfrac{8}{2x-y} - \dfrac{7}{x-2y} = 9 \end{array} \right|$$

$\mathbb{D}$: $2x - y \neq 0$
$2x \neq y \Rightarrow \underline{x \neq \frac{y}{2}}$
$\wedge$ $x - 2y \neq 0$
$\underline{x \neq 2y}$ 0,5P

$\mathbb{D}_{x/y} = \mathbb{R} \setminus \{ x = \frac{y}{2} \wedge x \neq 2y \}$

Substitution

$a = \dfrac{1}{2x-y} \quad \wedge \quad b = \dfrac{1}{x-2y}$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 4a - 5b = 6 \\ 8a - 7b = 9 \end{array} \right|$$ 0,6P

$\underline{D} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -28 - (-40) = \underline{12}$

0,9P $\underline{D_a} = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 9 & -7 \end{vmatrix} = -42 - (-45) = \underline{3} \Rightarrow a = \dfrac{D_a}{D} = \dfrac{3}{12}$

$\underline{a = 1/4}$

$\underline{D_b} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 48 = \underline{-12}$

$\Rightarrow \underline{b} = \dfrac{D_b}{D} = \dfrac{-12}{12} = \underline{-1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2x-y} \Rightarrow 4 = 2x - y$

1) $\boxed{y = 2x - 4}$

$\mathbb{L} = \{(3;2)\}$

$-1 = \dfrac{1}{x-2y}$ 1P

2) $\boxed{2y - x = 1}$ 1) in 2) $\Rightarrow 2(2x-4) - x = 1$

$3x = 9$

$\underline{\underline{x = 3}}$

Kontrolle:

$\dfrac{4}{2\cdot 3 - 2} - \dfrac{5}{3 - 2\cdot 2} \overset{?}{=} 6 \Rightarrow 1 + 5 = 6$

ok!

$\underline{y} = 2\cdot 3 - 4 = \underline{\underline{2}}$

3

$$\frac{x+2}{|7-x|} \leq \frac{1}{3} \qquad \underline{G = \mathbb{R}!}$$

$$\mathbb{D} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 7-x \neq 0 \\ x \neq 7 \end{array}\right\} \quad \underline{\underline{\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{7\}}}$$

0,3

$|7-x|$: Nenner immer absolut = eine positive Zahl!!

0,4

Gültigkeitsbereich bereich einschränken!

$$\Rightarrow \quad x+2 \leq \frac{1}{3}|7-x|$$

$7-x \geq 0$	$7-x < 0$
$\underline{x \leq 7}$: (0,2)	$\underline{x > 7}$: (0,2)
$x+2 \leq \frac{1}{3}(7-x)$	$x+2 \leq -\frac{1}{3}(7-x)$
$3x+6 \leq 7-x$	$-3x-6 \geq 7-x$
$4x \leq 1$	$-2x \geq 13$
$\underline{x \leq 0{,}25}$ (0,5)	$\underline{x \leq -6{,}5}$ (0,5)

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_+ = \{x \leq 0{,}25\} \qquad \underline{\mathbb{L}_- = \{\}}$$

0,2 0,2

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_+ \cup \mathbb{L}_-$$

0,5

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{x \,/\, x \leq 0{,}25 \wedge x \in \mathbb{R}\}}}$$

4 $\quad 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} - \sqrt{2x+3} = 0$ $\qquad$ $G = \mathbb{R}$!

$\mathbb{D}$: $\quad x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
$\wedge\ x+5 \geq 0 \qquad x \geq -5$
$\wedge\ 2x+3 \geq 0 \qquad x \geq -1{,}5$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 2}$

0,6P

$$\left(3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+5}\right)^2 - \left(\sqrt{2x+3}\right)^2$$

$$9(x-2) - 6\sqrt{x-2}\sqrt{x+5} + x+5 = 2x+3$$

$$9x - 18 + x + 5 - 2x - 3 = 6\sqrt{(x-2)(x+5)}$$

$$\left(\underset{4x}{\cancel{8x}} - \underset{8}{\cancel{16}}\right)^2 = \left(\underset{3}{\cancel{6}}\sqrt{(x-2)(x+5)}\right)^2$$

$$16x^2 - 64x + 64 = 9(x^2 + 3x - 10)$$

$$16x^2 - 64x + 64 = 9x^2 + 27x - 90$$

$$7x^2 - 91x + 154 = 0$$

$$x^2 - 13x + 22 = 0$$

1,8P

$$(x-2)(x-11) = 0$$

$x_1 = 2$
$x_2 = 11$ $\quad$ nach $\mathbb{D}$ ok

Test:

$3\sqrt{2-2} - \sqrt{2+5} - \sqrt{2\cdot 2+3} \stackrel{?}{=} 0$

$0 - \sqrt{7} - \sqrt{7} = -2\sqrt{7} \neq 0$

$3\sqrt{9} - \sqrt{16} - \sqrt{25} \stackrel{?}{=} 0$

$9 - 4 - 5 = 0$ ok

0,6P

$\mathbb{L} = \{11\}$

5 x : Menge produzierter Rasenmäher pro Tag

y : Menge produzierter Gartenpflüge pro Tag

Bedingungen:

1) $x, y \geq 0$ 6) $y \leq x$ 0,2

2) $x \leq 80$ 0,2

3) $y \leq 40$ 0,2

4) $x + y \leq 100 \Rightarrow y \leq -x + 100$ 0,4

5) $4x + 14y \leq 700 \Rightarrow y \leq -\frac{2}{7}x + 50$ 0,4

Zielfunktion: $24x + 60y = z$ ($z = max$) 0,2

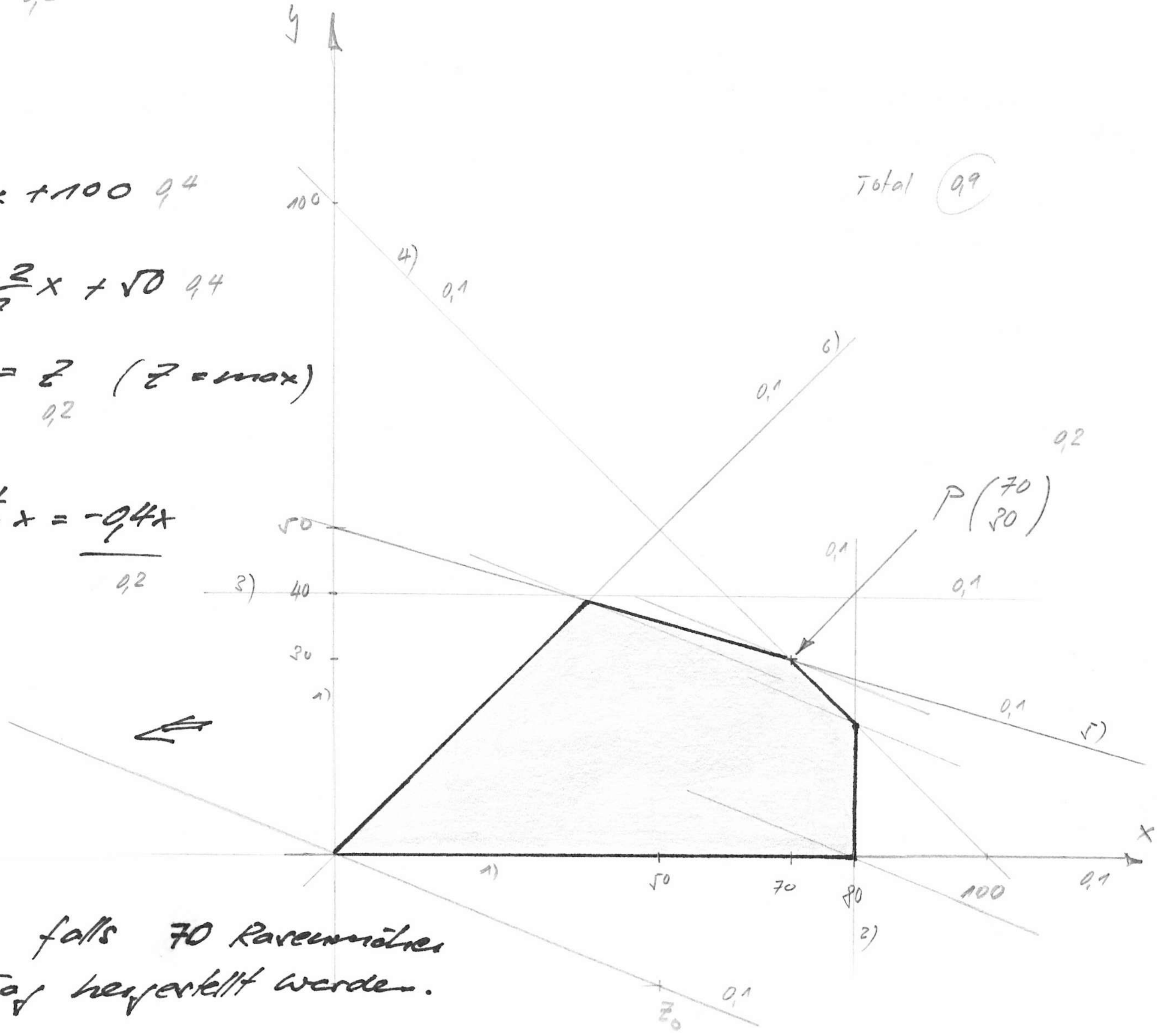
Parallelenschar: $z_0 = 0 \Rightarrow$

$$y = \frac{-24}{60}x = -0{,}4x$$

0,2

→ Total 1,8

Planungspolygon



$P\binom{70}{30}$

$z_{max} = 24 \cdot 70 + 60 \cdot 30$

$\underline{\underline{z_{max} = 3480\ Fr}}$ 0,3

Max Gewinn von 3480 Fr/Tag falls 70 Rasenmäher und 30 Gartenpflüge pro Tag hergestellt werden.

6 allgemeine Exponentialfunktion

$$T(t) = a e^{-kt} + b$$

mit $T(0{,}5) = 86°C$ 1)

$T(4) = 68{,}5°C$ 2)

$T(\infty) = 21°C$ 3)

Interpretation von 3):

Wenn wir genügend lange warten nehmen Kaffee und Tasse 21°C an!

$$\rightarrow T(\infty) = \underbrace{a e^{-k\infty}}_{\rightarrow 0} + b = 21$$

0,6

$$\Rightarrow \underline{\underline{b = 21}}$$

1) und 2):

0,6

$$\left| \begin{array}{l} 86 = a e^{-0{,}5k} + 21 \\ 68{,}5 = a e^{-4k} + 21 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ll} 65 = a e^{-0{,}5k} & 4) \\ 47{,}5 = a e^{-4k} & 5) \end{array} \right|$$

4) $\rightarrow$ $a = 65 e^{0{,}5k}$

4) in 5) $\rightarrow$ $47{,}5 = 65 e^{0{,}5k} e^{-4k}$

$$47{,}5 = 65 e^{-3{,}5k}$$

$$e^{3{,}5k} = \frac{65}{47{,}5} \quad | \ln$$

$$3{,}5k = \ln \frac{65}{47{,}5}$$

0,7

$$\underline{k} = \frac{1}{3{,}5} \cdot \ln \frac{65}{47{,}5} = \underline{\underline{0{,}0896}}$$

$$\underline{a} = 65 \cdot e^{0{,}5 \cdot 0{,}0896} = \underline{\underline{67{,}9788}}$$

Fortsetzung Aufgabe 6

$$T(t) = 67{,}9788\, e^{-0{,}0896t} + 21$$

(0,3)

Kaffeetemperatur $T = 60°C$:

$$60 = 67{,}9788\, e^{-0{,}0896t} + 21$$

$$39 = 67{,}9788\, e^{-0{,}0896t}$$

$$e^{0{,}0896t} = \frac{67{,}9788}{39}$$

(0,8)

$$t = \frac{1}{0{,}0896} \cdot \ln \frac{67{,}9788}{39}$$

$$t = 6{,}2 \text{ min}$$

7 Quadratische Ergänzung von 2)

$s = 0{,}2t^2 + 7{,}2t - 43{,}2$

$s = 0{,}2\,(t^2 + 36t - 216)$

$s = 0{,}2\,[(t+18)^2 - 216 - 324]$

$s = 0{,}2\,[(t+18)^2 - 540]$

$s = 0{,}2\,(t+18)^2 - 108$ 0,5P

Die Bewegungsgleichungen beschreiben jeweils ein Wegintervall.

0,5P

nach $t = 60s$ hat der Zug 749,72 zurückgelegt ⇒ Haltestellenabstand $\Delta s = 749{,}72m$

$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{749{,}72}{60} = 12{,}495\,m/s \hat{=} 44{,}98\,km/h$

$\approx 45\,km/h$ 0,5P

Max. Geschwindigkeit

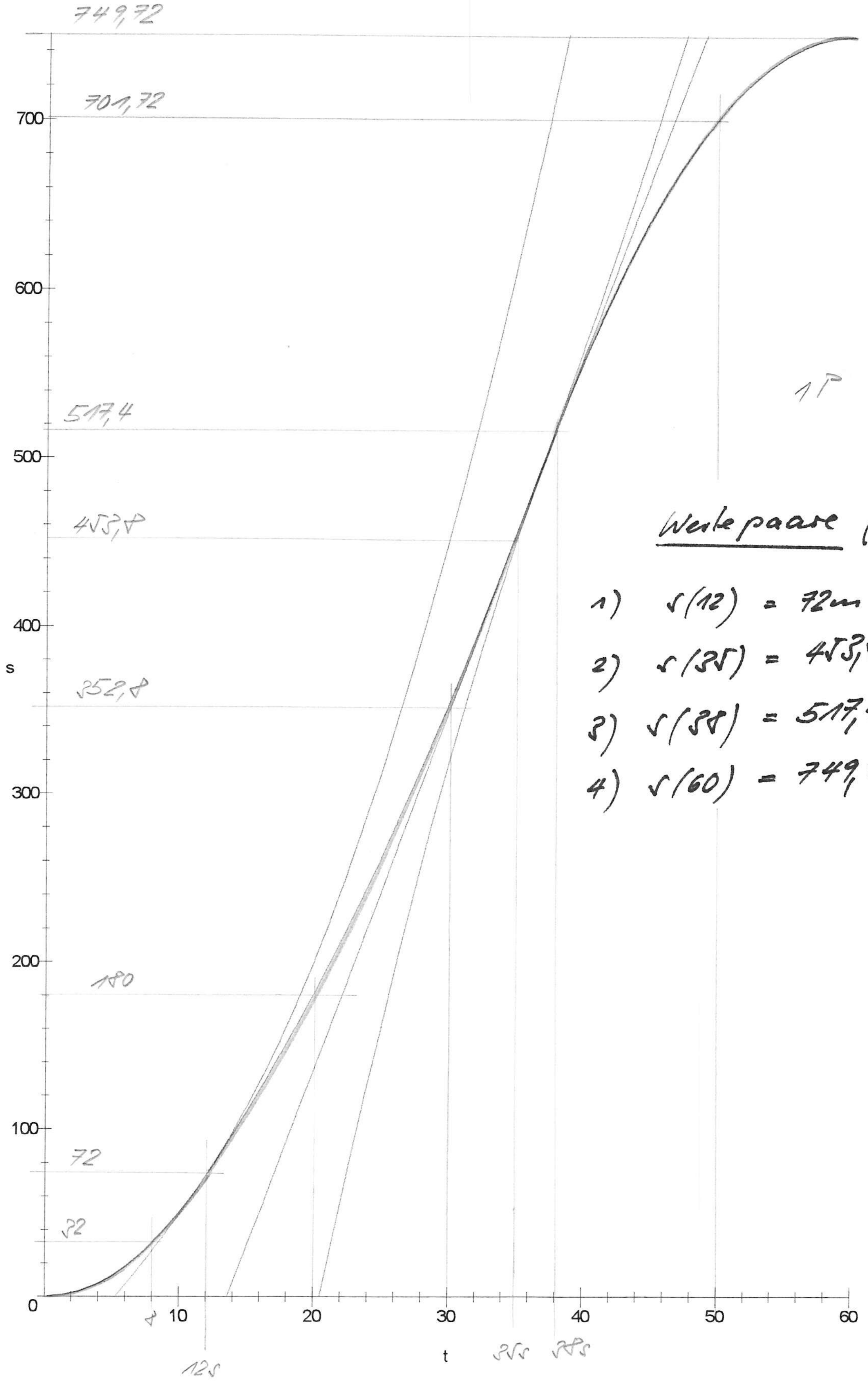
Die Steigung im s(t)-Diagramm ist maximal kurz vor dem Bremsvorgang.

⇒ Wir finden die Lösung in Gleichung 3)

⇒ 3) $s = 21{,}2\,(t-35) + 453{,}8$ 0,5P

⇒ $m = v_{max} = 21{,}2\,m/s \hat{=} 76{,}32\,km/h$

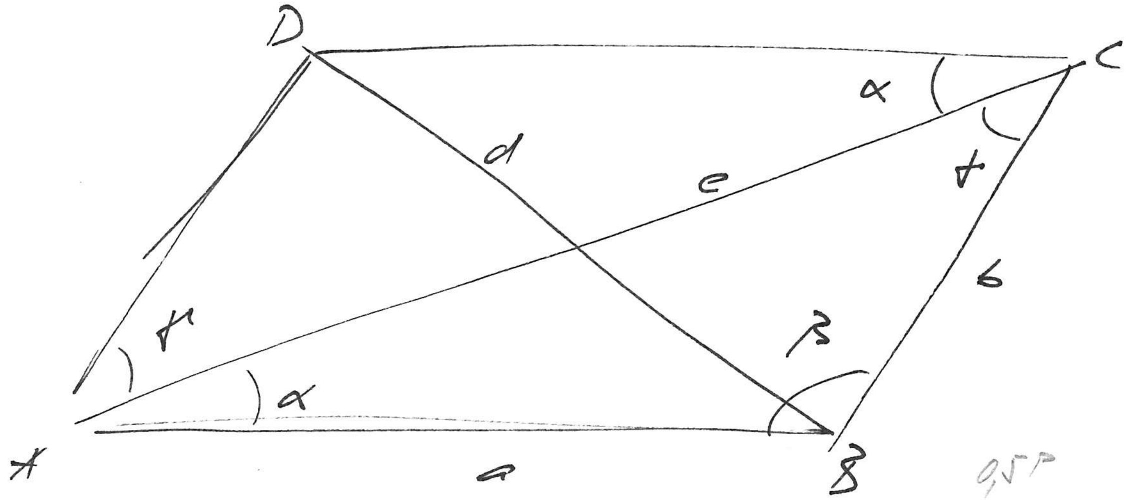
7 Diagramm



Wertepaare (Grenzen)

1) $s(12) = 72\,m$
2) $s(35) = 453{,}8\,m$
3) $s(38) = 517{,}4\,m$
4) $s(60) = 749{,}72\,m$

8



0,5P

Behauptung:

$$2a^2 + 2b^2 = e^2 + d^2$$ 0,5P

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$$

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180 - \alpha - \gamma)$$ 1P

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha + \gamma)$$

0,5P

mit $\cos[180 - (\alpha + \gamma)] = -\cos(\alpha + \gamma)$ folgt

$$e^2 + d^2 = a^2 + b^2 + \cancel{2ab \cos}(\alpha + \gamma)$$
$$+ a^2 + b^2 - \cancel{2ab \cos}(\alpha + \gamma)$$ 0,5P

$$e^2 + d^2 = 2a^2 + 2b^2$$

w.z.bw.!

9

$\underbrace{\cos^2(x)} + \sqrt{\sin^2(x)} - 4\sin(x) = 0$ $\qquad \mathbb{D}_{max} \leq [0; 3\pi]$

$1 - \sin^2(x) + \sqrt{\sin^2(x)} - 4\sin(x) = 0$

$4\sin^2(x) - 4\sin(x) + 1 = 0$ 0,5P

Substitution $\sin(x) = a$ 0,5P

$4a^2 - 4a + 1 = 0$

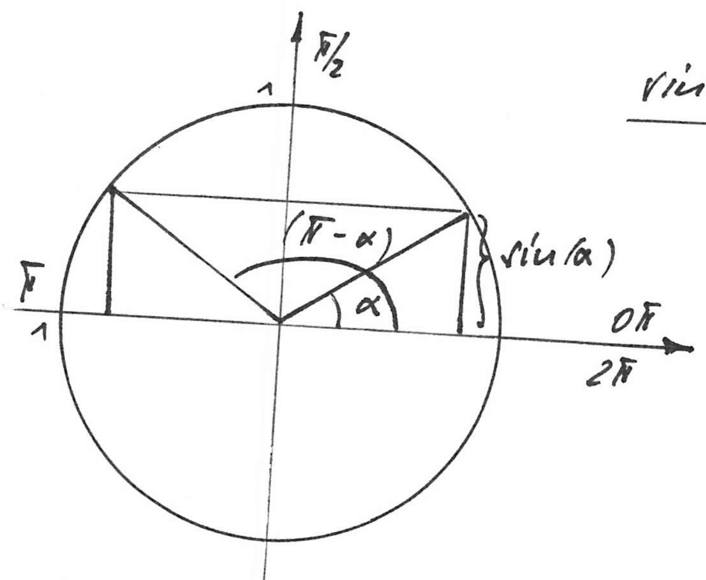
$(2a - 1)(2a - 1) = 0$ $\qquad a_{1/2} = +\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \arcsin 0{,}5 = 0{,}5236$ 0,5P

Nullstelle für eine Sinusfunktion $\sin(x)$: $x = n\pi \quad n \in N_0^+$

0,5P

Für die Nullstelle im Intervall $[0; 3\pi]$ betrachten wir den Einheitskreis



$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$!

1P

$x_1 = 0{,}5236$

$x_2 = \pi - 0{,}5236 = 2{,}618$

$x_3 = 0{,}5236 + 2\pi = 6{,}809$

$x_4 = 3\pi - 0{,}5236 = 8{,}901$

Allgemein:

$x_k = 0{,}5236 + 2k\pi \quad k \in N_0^+$

$x_n = (\pi - 0{,}5236) + 2n\pi \quad n \in N_0^+$

$$g_1 : \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Richtungsvektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

0,8P

$\vec{a} \stackrel{?}{=} t\vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ sind nicht kollinear und somit auch nicht zusammenfallend

$g_1 \cap g_2$:

2×2 überbestimmt

$$\begin{array}{r|l|} 1) & 3 - 4\lambda = 2 - 2\mu \\ 2) & 2 + \lambda = -2 + 3\mu \\ 3) & -1 + 3\lambda = 4\mu \end{array}$$

1,2P

$$\begin{array}{r|l|} 1) & 2\mu - 4\lambda = -1 \\ 2) & -3\mu + \lambda = -4 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ HP $\underline{\underline{\mu = 1{,}7}}$

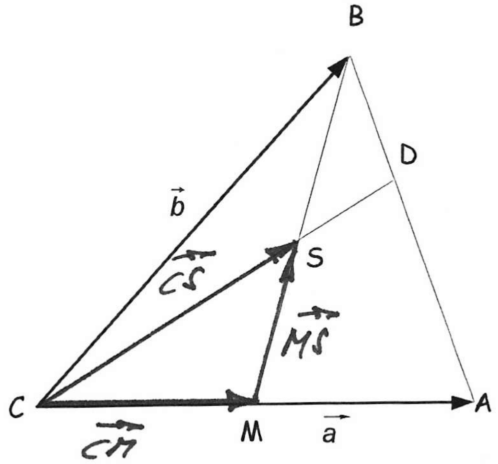
$\underline{\underline{\lambda = 1{,}1}}$

Falls $g_1 \cap g_2$ einen gemeinsamen Punkt besitzen erfüllen μ und λ die Gleichung 3):

1P

$\underline{-1 + 3 \cdot 1{,}1 \neq 4 \cdot 1{,}7} \Rightarrow$ keinen gemeinsamen Punkt: $\underline{\underline{\text{windschief}}}$.

11



$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

$-\vec{AB} = \vec{a} - \vec{b}$

0,2P

① $\vec{CS} = \mu \vec{CD}$

$\vec{CD} = \vec{b} + \frac{1}{3}(-\vec{AB}) = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b})$

$\vec{CD} = \frac{\vec{a}}{3} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$\underline{\vec{CS} = \mu\left(\frac{\vec{a}}{3} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)}$ 0,6P

② $\vec{MS} = \varepsilon \vec{MB}$

$\vec{MB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}$

$\vec{MB} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{MS} = \varepsilon\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$ 0,6P

③ geschlossene Vektorkette:

$\vec{CS} - \vec{MS} - \vec{CM} = \vec{0}$

$\mu\left(\frac{\vec{a}}{3} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) - \varepsilon\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) - \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{0}$

$\mu\frac{\vec{a}}{3} + \frac{2}{3}\mu\vec{b} - \varepsilon\vec{b} + \frac{\varepsilon}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{0}$ 0,8P

$\vec{a}\left(\frac{\mu}{3} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}\right) + \vec{b}\left(\frac{2\mu}{3} - \varepsilon\right) = \vec{0}$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht kollinear $\Rightarrow$

$\frac{\mu}{3} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{2\mu}{3} - \varepsilon = 0$

Fortsetzung Aufgabe 11

$$\begin{array}{ll} 1) & \dfrac{\mu}{3} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{1}{2} \\ 2) & \dfrac{2\mu}{3} - \varepsilon = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{2\mu}{3}$$

2) in 1) $\rightarrow$ $\dfrac{\mu}{3} + \dfrac{\cancel{2}^{1}\mu}{\cancel{6}_{3}} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{2\mu}{3} = \frac{1}{2}$$

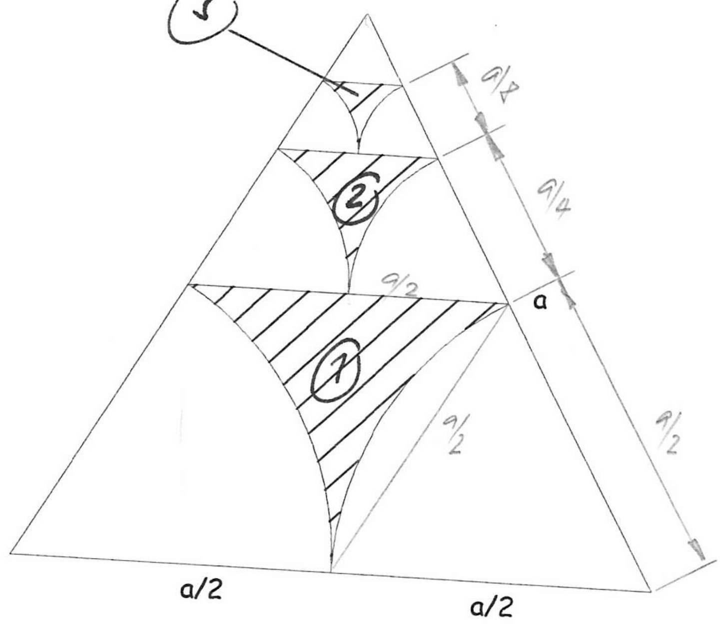
$$\varepsilon = \frac{\cancel{2}^{1} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{4}_{2}} \quad \Leftarrow \quad \underline{\mu = 3/4}$$

$$\underline{\varepsilon = 1/2}$$

$$\vec{CS} = 3/4 \left(\frac{\vec{a}}{3} + \frac{2}{3}\vec{b} \right)$$

$$\underline{\underline{\vec{CS} = \frac{\vec{a}}{4} + \frac{\vec{b}}{2}}}$$

12



gleichseitiger Dreieck:

$$A_0 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \mathrel{\hat{=}} 100\%$$

0,5P

allgemeine Formel für ▽

$\frac{a}{2} = b$

$$A_{▽} = A_{⏢} - A_{△} = \left(\frac{2b+b}{2}\right)\frac{b}{2}\sqrt{3} - \frac{b^2\pi}{3}$$

$$A_{▽} = \frac{3b^2\sqrt{3}}{4} - \frac{b^2\pi}{3} = b^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$$

1P

$$A_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$A_2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$A_3 = \left(\frac{a}{8}\right)^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$$

0,5P

$$A_{tot} = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{64}\right)\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$A_{tot} = \frac{21a^2}{64}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$$

0,5P

$$A_{tot} = 0{,}0826\,a^2$$

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= 0{,}433\,a^2 = 100\% \end{aligned}\right\} A_{tot} = 19{,}08\%$$

$$A_{tot} = \frac{0{,}0826\,a^2 \cdot 100}{0{,}433\,a^2}$$

0,5P