

TECHNISCHE BERUFSMATURITÄT 2001

MATHEMATIK

Name:

Vorname:

Prüfungsnummer:

Wichtige Hinweise

Für jede Aufgabe ist ein *NEUES BLATT* zu verwenden!

Bitte *JEDES LÖSUNGSBLATT* mit ihrem vollständigen Namen der Prüfungsnummer anschreiben!

Lösungen ohne klaren und vollständigen *LÖSUNGSWEG* mit Angabe der *ZWISCHENRESULTATE* werden nicht akzeptiert.

UNGÜLTIGE TEILE der Arbeit sind deutlich durchzustreichen; *RESULTATE* sind durch doppeltes Unterstreichen hervorzuheben.

Sie können mit *BLEISTIFT* schreiben.

Zwischenresultate und Resultate auf zwei signifikante Stellen nach dem *KOMMA* runden.

Die *AUFGABENSERIE* umfasst 3 Seiten und 12 Aufgaben.

Hilfsmittel: *Taschenrechner Formelsammlung (ohne gelöste Beispiele), Zeichenutensilien (Geodreieck, Zirkel, Massstab etc.).*

Prüfungsdauer: *Die Prüfung dauert 240 Minuten (keine Pause).*

Anzahl Aufgaben: *Es sind 12 Aufgaben zu lösen. Jede richtig gelöste Aufgabe zählt drei Punkte. Die maximal mögliche Punktzahl beträgt 36 Punkte.*

ERREICHTE PUNKTE

VISUM
EXAMINATOR

PRÜFUNGSNOTE

VISUM
EXPERTE

- 1 Vereinfachen Sie den gegebenen Term soweit wie möglich!

$$T(n) = 6(-6^{-1})^{-6n} + \left(-\frac{1}{6^{-1}}\right)(-6^{-3n})^{-2} - \frac{6^{-2} \left(-\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}\right)^{2n+1}}{\left((-6)^{3n}\right)^2} \quad \wedge n \in \mathbb{Z}^+$$

- 2 Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Parametergleichung in der Grundmenge der reellen Zahlen $G = \mathbb{R}$. Die Lösungsvariable sei x :

$$\frac{3ab}{bx+ab} - \frac{x-5}{x-a} = \frac{3a^2b-3a^2}{a^2b-a^2-bx^2+x^2} + \frac{5ab}{abx-a^2b} \quad \wedge \quad a, b \in \mathbb{R}^* \quad \wedge \quad b \neq 1$$

- 3 Gegeben ist eine Bruchgleichung in der Grundmenge der reellen Zahlen $G = \mathbb{R}$!

$$\frac{4x+1}{11-x} \geq \frac{4x-7}{-x-11}$$

- a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge D
 b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge L

- 4 Ein Bauauftrag wird von 4 Firmen A,B,C,D ausgeführt. Der Bau soll gemäss Offerte innerhalb von $3\frac{1}{3}$ Monaten erstellt sein. Firma A kann aber im ersten Monat nur 50% ihrer Arbeiter zur Verfügung stellen. Dadurch wird im ersten Monat nur ein Viertel des Bauvorhabens realisiert. Im zweiten Monat scheidet Firma A wegen Differenzen mit dem Bauherrn gänzlich aus, zudem können die Firmen B und C nur 50% ihrer Belegschaft stellen. Daher wird im zweiten Monat nur ein weiteres Bauachtel realisiert. Nach dem zweiten Monat scheidet die Firma C aus und der Bauherr engagiert wieder die Firma A, die normal arbeitet mit den Firmen B und D, wobei B die normale Belegschaft um 25% erhöht. In weiteren $2\frac{1}{2}$ Monaten ist der Bau endlich erstellt. In wie vielen Monaten hätte jede der Firmen das Bauvolumen allein ausführen können?

Bem.: Das auftretende Gleichungssystem ist mit der Determinantenmethode zu lösen.

- 5 Wir betrachten den Abkühlvorgang von Kaffee in einer Tasse. Wir vereinfachen die Aufgabe und nehmen an, dass die Tassentemperatur mit der Kaffeetemperatur zu jedem Zeitpunkt übereinstimmt. Eine Messreihe weist uns auf eine exponentielle Abnahme der Kaffeetemperatur hin. Aus der Messreihe entnehmen wir drei Wertepaare:

$$T(0.5\text{min}) = 86^\circ\text{C}; \quad T(4\text{min}) = 68.5^\circ\text{C}; \quad T(\infty\text{min}) = 21^\circ\text{C}$$

Den Abkühlvorgang beschreiben wir mit der allgemeinen Exponentialfunktion $T(t) = a \cdot e^{-kt} + b$

- Berechnen Sie die Parameter a , b und k der Funktionsgleichung.
- Wie viele Minuten müssen Sie warten, wenn Sie den Kaffee mit 60°C trinken möchten?

- 6 Messungen über das Fahrverhalten einer Magnetbahn zwischen zwei Haltestellen ergaben folgende Zusammenhänge:

Funktionsgleichung für den Wegabschnitt s [m]		Zeitintervall t [s]
(1) $s_1 = 0.5t^2$ (Startvorgang aus der Ruhe)	\wedge	[0;12]
(2) $s_2 = 0.2t^2 + 7.2t - 43.2$	\wedge	[12;35]
(3) $s_3 = 21.2(t - 35) + 453.8$	\wedge	[35;38]
(4) $s_4 = -0.48(t - 60)^2 + 749.72$ (Bremsvorgang bis zum Stillstand)	\wedge	[38;60]

Stellen Sie den Gesamtverlauf in einem $s(t)$ -Diagramm dar und ermitteln Sie analytisch die Maximalgeschwindigkeit und die Durchschnittsgeschwindigkeit der Magnetbahn während dieser Messfahrt. Wie weit sind die Haltestellen auseinander? Für den Streckenabschnitt (2) ist die Funktionsgleichung in die Scheitelform zu überführen.

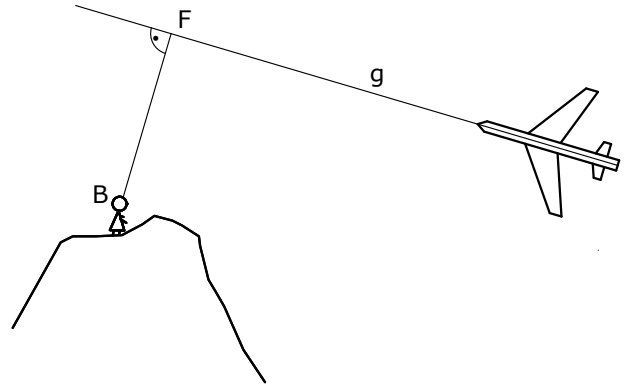
- 7 a) Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichung mit Hilfe der Additionstheoreme!

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$
- b) Lösen Sie die folgende Gleichung im Intervall $[0; 2\pi]$!

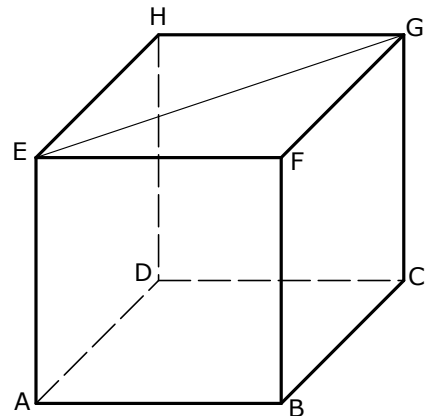
$$\sin(2x) \cdot \tan(x) = 1 \quad \wedge \quad x \in \mathbb{R}$$

- 8 Ein Flugzeug fliegt auf der Geraden Bahn g . Eine Bergsteigerin B befindet sich auf dem Gipfel. An welcher Stelle F der Flugbahn g kann sie das Flugzeug am besten sehen, weil es zu ihr die kleinste Entfernung hat? Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes F und die Distanz \overline{BF} .

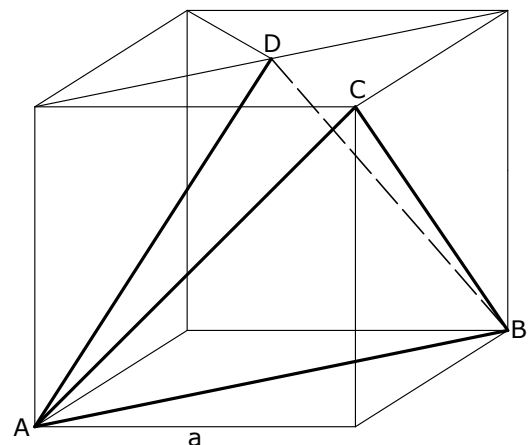
$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$



- 9 Von einem Würfel im Raum kennen wir drei Punkte der Grundfläche ABCD: $A(3 | -1 | 2)$, $B(7 | -1 | 5)$ und $D(3 | 4 | 2)$. Berechnen Sie die übrigen Eckpunkte. Dabei soll die z-Koordinate der Deckflächenpunkte grösser sein als die z-Koordinate der zugehörigen Grundflächenpunkte. Berechnen Sie zudem das Volumen der Umkugel.



- 10 Aus einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 10\text{cm}$ wird ein Körper mit den Ecken ABCD gefräst. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen dieses Körpers in Abhängigkeit der Kantenlänge a . Die Resultate sind auf zwei signifikante Stellen nach dem Komma anzugeben.



- 11 Bei Projektierungsarbeiten für eine neue Hochstrasse, die über zwei Eisenbahnlinien und in zwei bestehende Strassen führt, müssen die Entfernungen \overline{PA} , \overline{PB} , \overline{PC} , \overline{BC} und \overline{AC} ermittelt werden. Dazu werden auf der Achse der Bahnhofstrasse von P aus in 300 m Entfernung der Punkt Q festgelegt und die Winkel zwischen PQ und den Verbindungslinien nach A, B und C gemessen. Berechnen Sie die Distanzen \overline{PA} , \overline{PB} , \overline{PC} , \overline{BC} und \overline{AC} !

Winkelmasse:

$$\angle APQ = 92.5^\circ$$

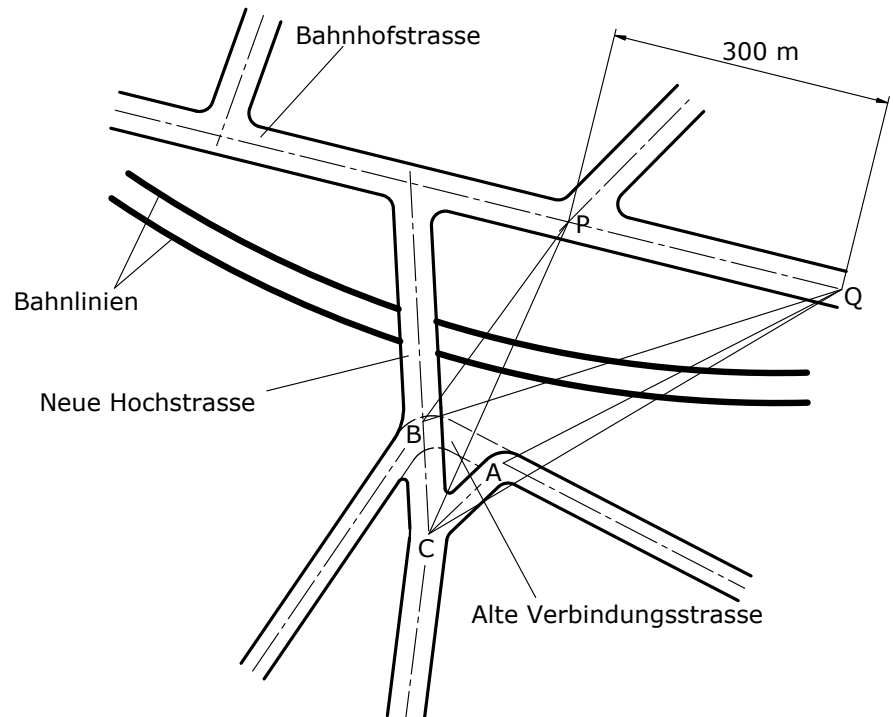
$$\angle PQA = 40.8^\circ$$

$$\angle BPQ = 116.0^\circ$$

$$\angle PQB = 31.5^\circ$$

$$\angle CPQ = 108.2^\circ$$

$$\angle PQC = 44.3^\circ$$



- 12 Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der schraffierten ebenen Figur allgemein aus dem Radius R. Die Resultate sind exakt, d.h. ohne Dezimalbrüche anzugeben.

