MATHEMATIK, Teil 1

Allgemeine Hinweise:
- Die Prüfungszeit beträgt 90 Minuten.
- Ausser den Schreib-, Zeichen- und Konstruktionsutensilien sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Alle Resultate müssen mit einem vollständigen, eindeutig nachvollziehbaren Lösungsweg belegt sein.
- Ungültige Lösungsansätze und Resultate sind deutlich durchzustreichen.
- Jede vollständig richtig gelöste Aufgabe wird mit zwei Punkten bewertet.
- Eine sauber und exakt dargestellte Prüfungsarbeit wird zusätzlich mit zwei Punkten bewertet.
- Für 22 der 32 möglichen Punkte wird die Note 6 erteilt.

Wenn nichts anderes angegeben ist, gilt: Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen ($G = \mathbb{R}$)

1. Vereinfachen Sie so weit wie möglich: $$\frac{\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(\frac{n}{m}+n\right)\cdot\left(m^2-n^2\right)}{\frac{m^2-mn+n^2}{m^2}-1}=$$

2. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit $c = 8\ cm$, $h_a = 6\ cm$, $h_b = 3\ cm$ und erstellen Sie einen Konstruktionsbericht!

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge: $30-\sqrt{x}=x$

4. a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung: $10^{\lg x}=100$

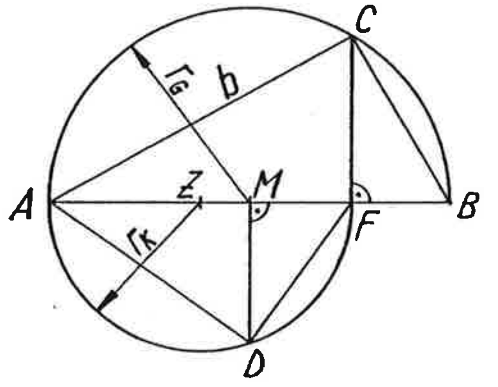
b) Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b der Funktion $y=a\cdot b^x$ mit Hilfe der dazugehörigen Wertetabelle.

x	y
0	2
1	6
3	54
4	162

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\frac{(2x+6a)(x+9b)-2a^2}{(3b+x)(x-a)}=\frac{2b+6x}{x-a}-\frac{8x-4a}{6b+2x}$$

6. Formulieren Sie folgende Strecken mit r_G und b: $\overline{BF}$; $\overline{ZA}$; $\overline{MD}$ und $\overline{FD}$.



Bitte wenden!

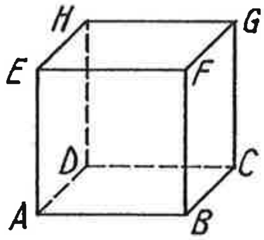
7. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\left| \begin{array}{l} 3x+3y=15 \\ y+2z=4 \\ x+3z=3 \end{array} \right|$.

8. Welche Winkel α im Intervall $0 \le \alpha \le 90°$ erfüllen die Gleichung

$$2\tan\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = 2\tan^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} ?$$

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge: $\frac{x}{2x-1} \le \frac{2}{5}$

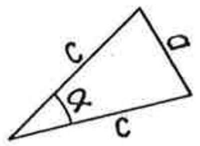
10. Im Würfel $ABCDEFGH$ liegt der Punkt P in der Seitenfläche $BCGF$, so dass $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$.
Setzen Sie $\overrightarrow{BP}$ aus den Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AF}$ zusammen.



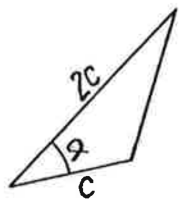
11. Für welche Parameterwerte a ist die Gleichung $ax^2 + 12x - 16 = x^2$ erfüllbar?

12. Formulieren Sie mit α und c

a) die Seite a;



b) die Fläche des Dreiecks:



13. Zwei Tangenten t_1 und t_2 berühren denselben Kreis $k(M;r)$ in den Punkten T_1 ; T_2 und schneiden sich im Punkt S. Der $\sphericalangle T_1ST_2$ misst $60°$.
Formulieren Sie mit dem Radius r
a) die Strecken $\overline{SM}$, $\overline{ST_1}$ und $\overline{ST_2}$;
b) die Fläche des Vierecks ST_1MT_2.

14. Es gilt **G** = **C**.
$x_1 = -3+4i$ ist eine Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + 1 = 0$ mit den reellen Koeffizienten a und b. Berechnen Sie a und b.

15. Stellen Sie die Lösungsmenge des Systems graphisch dar.

$$\left(y \ge \left|\frac{1}{2}x\right|\right) \wedge \left(y < -\frac{1}{5}x^2 + 5\right)$$

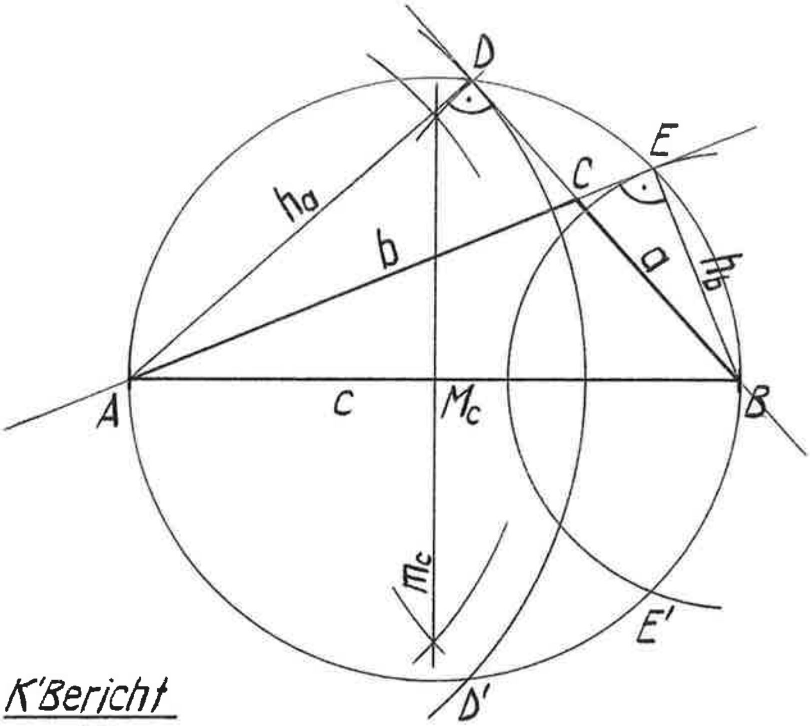
Bitte wenden!

Lösungen | Pte

1. $$\frac{\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{n}{m}+n\right)(m^2-n^2)}{\frac{m^2-mn+n^2}{m^2}-1} = \frac{(m-m-n)(n+mn)(m+n)(m-n)\cdot m^2}{m(m+n)\cdot m\cdot(m^2-mn+n^2-m^2)}$$ (1)

$$= \frac{-n(mn+n)(m-n)}{-n(m-n)} = mn+n = n(m+1)$$ 2

2.



1

K'Bericht

1. $\overline{AB} = c = 8\,cm$
2. Thales⊙(AB) ∩ ⊙($A; h_a = 6cm$) = {D; D'}
   Thales⊙(AB) ∩ ⊙($B; h_b = 3cm$) = {E; E'} 1
3. AE ∩ BD = {C} ; ΔABC

3.

$$30 - \sqrt{x} = x \qquad \left|\, +\sqrt{x};\ -x;\ (\ )^2\right.$$

$$900 - 60x + x^2 = x$$

$$x^2 - 61x + 900 = 0$$ (0.5)

$$\therefore\ x_{1,2} = \frac{61 \pm \sqrt{61^2 - 4\cdot 1\cdot 900}}{2\cdot 1} = \frac{61 \pm 11}{2} = 25;\ 36$$ (1)

CHECK in BG ⟶ $x_1 = 25:\ 25 \equiv 25$; $x_2 = 36:\ 24 \not\equiv 36$ — $\mathbb{L} = \{x \mid 25\}$ 2

4. a.

$$10^{\lg x} = 100$$

$$\lg x \lg 10 = \lg 100$$

$$\lg x = 2$$

$$\therefore\ x = 100$$

4. b.

$$y = ab^x$$

$$2 = ab^0 \quad \therefore\ a = 2$$ 0.5

$$6 = 2b^1 \quad \therefore\ b = 3$$ 0.5

1

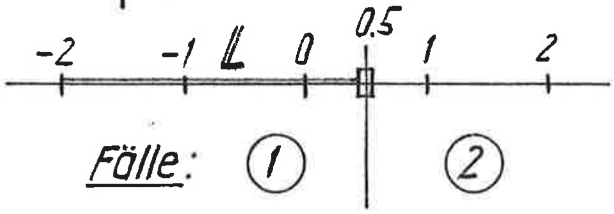
		Pte
5.	$\frac{(2x+6a)(x+9b)-2a^2}{(3b+x)(x-a)} = \frac{2b+6x}{x-a} - \frac{8x-4a}{6b+2x}$	
	$2[(2x+6a)(x+9b)-2a^2] = 2\cdot 2(b+3x)(3b+x)-(8x-4a)(x-a)$	
	$4x^2+36bx+12ax+108ab-4a^2 = 12b^2+40bx+12x^2-8x^2+12ax-4a^2$	(1)
	$-4bx = -108ab+12b^2 = -12b(9a-b)$	
	$\underline{\underline{x = 3(9a-b)}}$	2
6.	$\overline{BC}^2 = 4r_G^2-b^2 = \overline{BF}\cdot 2r_G$ | PYTH; KATH'S	
	$\therefore\ \underline{\underline{\overline{BF} = 2r_G - \frac{b^2}{2r_G}}}$	0.5
	$\underline{\underline{\overline{ZA}}} = r_K = \frac{1}{2}(2r_G-\overline{BF}) = \underline{\underline{\frac{b^2}{4r_G}}}$	0.5
	$\overline{MD}^2 = r_G\cdot\overline{MF}$ | HOEHEN'S; $\overline{MF} = r_G-\overline{BF} = \frac{b^2}{2r_G}-r_G$	
	$\underline{\underline{\overline{MD} = (\frac{1}{2}b^2-r_G^2)^{1/2} = \sqrt{0.5b^2-r_G^2}}}$	0.5
	$\overline{FD}^2 = \overline{MD}^2+\overline{MF}^2 = \frac{b^2}{2}-r_G^2+\frac{b^4}{4r_G^2}-b^2+r_G^2 = \frac{b^2}{4r_G^2}(b^2-2r_G^2)$	
	$\underline{\underline{\overline{FD} = \frac{b}{2r_G}\sqrt{b^2-2r_G^2}}}$	0.5
7.	$\left.\begin{array}{rl} 3x+3y &= 15 \quad 1)\\ y+2z &= 4 \quad 2)\\ x+3z &= 3 \quad 3)\end{array}\right] (x,y,z) = \ldots!$	FF
	$1) \rightarrow\quad x = 5-y \quad 4)$	
	$4)$ IN $3) \rightarrow\quad y = 3z+2 \quad 5)$	
	$5)$ IN $2) \rightarrow\quad \underline{z = 0.4}$	(0.5)
	z IN $5) \rightarrow\quad \underline{y = 3.2}$ $\quad \mathbb{L} = \{(x,y,z)\mid$	(1)
	y IN $4) \rightarrow\quad \underline{x = 1.8}$ $\quad \underline{\underline{(1.8, 3.2, 0.4)\}}}$	2
8.	$2\tan\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = 2\tan^2\alpha+\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ | $\mathbb{D} = \{0\leq\alpha\leq 90°\}$	
	$2\frac{\sin\alpha\cdot 1}{\cos\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{2\cdot\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$	(0.5)
	$2\sin\alpha = 1$	(1)
	$\underline{\sin\alpha = \frac{1}{2}} \xrightarrow{\mathbb{D}} \underline{\underline{\alpha = 30°}}$	2

	Pte

9.

$$\frac{x}{2x-1} \leq \frac{2}{5} \qquad \Big| \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0.5\}$$

$$\frac{5x-4x+2}{5(2x-1)} \leq 0$$



$$\frac{x+2}{2x-1} \leq 0 \qquad (0.5)$$

Fälle:

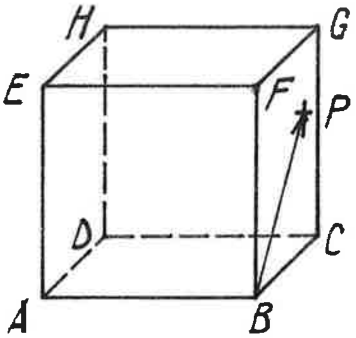
① $HN<0 \longrightarrow \quad x+2 \geq 0$

$$x \geq -2 \xrightarrow[\text{IN } ①]{\text{CHECK}} \mathbb{L}_1 = \{x \mid -2 \leq x < 0.5\} \qquad (0.5)$$

② $HN>0 \longrightarrow \quad x \leq -2 \xrightarrow[\text{IN } ②]{\text{CHECK}} \mathbb{L}_2 = \{\ \} \qquad (0.5)$

$\xrightarrow[①,②]{\text{Fälle}}$ $\quad \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \mid -2 \leq x < 0.5\} \qquad 2$

10.



$$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BF} \qquad \Big| \quad \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \qquad (0.5)$$

$$\frac{3}{4}\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}) \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}) \qquad 2$$

11.

$$ax^2 + 12x - 16 = x^2$$

$$(a-1)x^2 + 12x - 16 = 0 \qquad (0.5)$$

Bedingung: $\quad D \geq 0$

$$144 - 4(a-1)(-16) \geq 0 \qquad (1)$$

$$144 + 64a - 64 \geq 0$$

$$64a \geq -80$$

$$a \geq -\frac{5}{4} \qquad 2$$

12.a. $\quad a^2 = c^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c \cdot \cos\alpha$

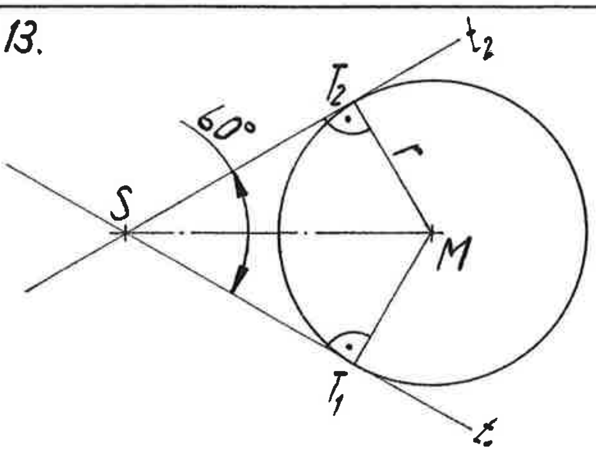
$$a = \sqrt{2(1-\cos\alpha)}\,c \qquad \Big| \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)} \qquad 1$$

oder $\quad a = 2c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \qquad 1$

12.b. $\quad A = \frac{1}{2} c \cdot 2c \cdot \sin\alpha$

$$A = c^2 \cdot \sin\alpha$$

13.



a. $\quad \overline{SM} = 2r \ ; \ \overline{ST_1} = \overline{ST_2} = r\sqrt{3} = 2r \cdot \cos 30° \qquad 0.5; 0.5$

b. $\quad A_{VE} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sqrt{3} = r^2\sqrt{3} \qquad 1$

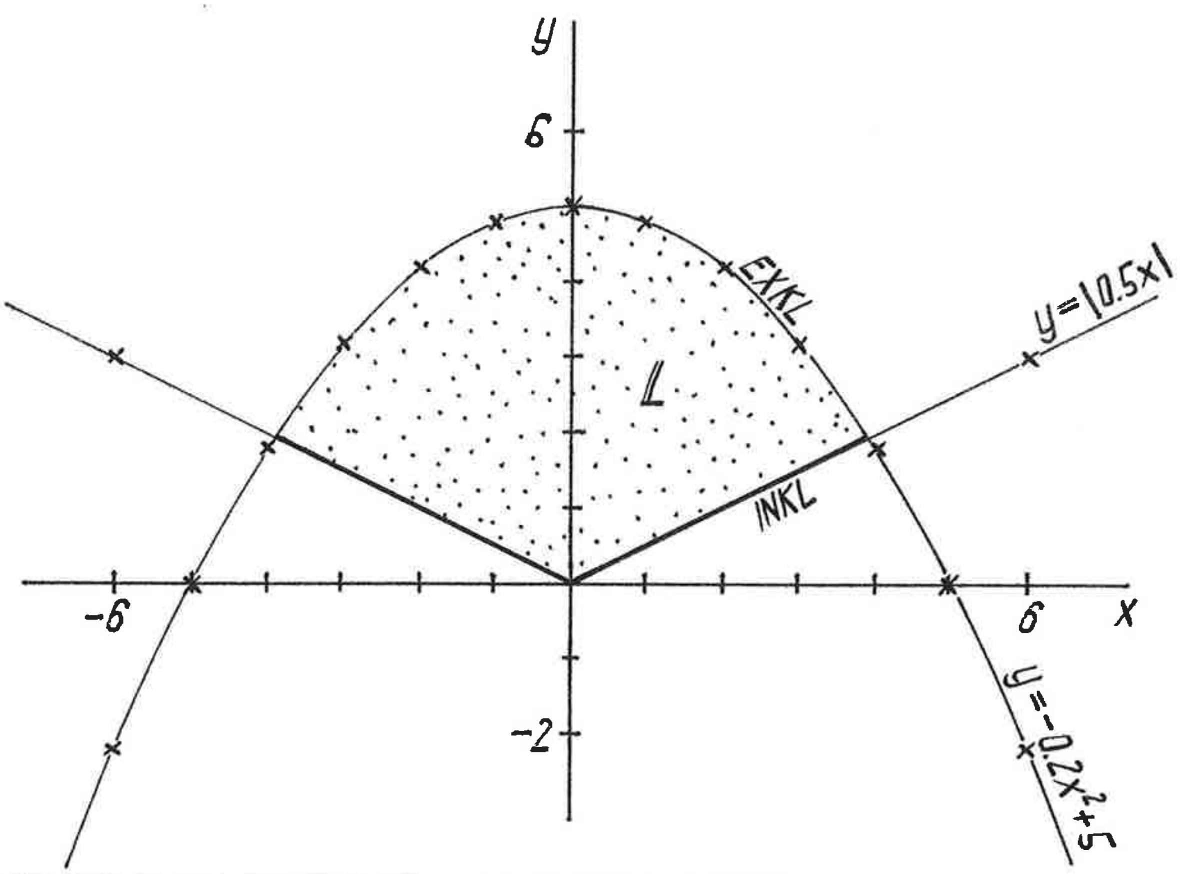
$$= 2\cos 30° \cdot r^2$$

		Pte
14.	$ax^2 + bx + 1 = 0 \quad \vert a; b \in \mathbb{R}$	
	$x_1 = -3+4i \longrightarrow x_2 = \overline{x}_1 = -3-4i$	(0.5)
	Viëta: $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad \therefore \underline{\underline{a}} = \frac{c}{x_1 x_2} = \frac{1}{9+16} = \underline{\underline{\frac{1}{25}}}$	1
	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \therefore \underline{\underline{b}} = -a(x_1+x_2) = -\frac{1}{25}(-6) = \underline{\underline{\frac{6}{25}}}$	1

15.

$$\left.\begin{array}{l} y \geq \vert 0.5x \vert \\ y < -0.2x^2+5 \end{array}\right] \mathbb{L} \text{ GRAFISCH!}$$

pro graph. Fehler 1/2 Abzug



G 1

P 1