MATHEMATIK, Teil 2

Allgemeine Hinweise:
- Die Prüfungszeit beträgt 150 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: -Taschenrechner
  -Tabellen- und Formelsammlungen ohne Lösungsbeispiele
  -Schreib-, Zeichen- und Konstruktionsutensilien
- Alle Resultate müssen mit einem vollständigen, eindeutig nachvollziehbaren Lösungsweg belegt sein.
- Ungültige Lösungsansätze und Resultate sind deutlich durchzustreichen.
- Die Bewertungspunkte für die vollständig richtige Lösung sind bei jeder Aufgabe angegeben.
- Eine sauber und exakt dargestellte Prüfungsarbeit wird zusätzlich mit zwei Punkten bewertet.
- Für 22 der 31 möglichen Punkte wird die Note 6 erteilt.

Wenn nichts anderes angegeben ist, gilt: Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen **($G = \mathbb{R}$)**

1. Ein Schriftendesigner gestaltet den Buchstaben „**Z**" in gerader Schrift wie folgt:

- Der obere und der untere Balken sind je um a kürzer als die Buchstabenhöhe h.
- Der Schrägstrich ist um a länger als h.

Formulieren Sie h in Abhängigkeit von a.

1 P

2. Konstruieren Sie ein trapezförmiges Tangentenviereck $ABCD$ mit $h = 5\ cm$, $\alpha = 60°$ und $\beta = 45°$.

Verwandeln Sie dieses Trapez unter Beibehaltung der Diagonalen $\overline{AC}$ in ein flächeninhaltsgleiches Drachenviereck.
Lösung mit Konstruktionsbericht.

3 P

3. Eine gerade Pyramide mit gleichseitiger, dreieckiger Grundfläche der Seitenlänge $s = 8cm$ hat die Höhe $h = 10cm$.

a) Erstellen Sie eine räumliche Skizze.

Berechnen Sie
b) den Winkel zwischen der Höhe h und einer Kante;
c) den Schnittwinkel zwischen Grund –und Seitenfläche.

3 P

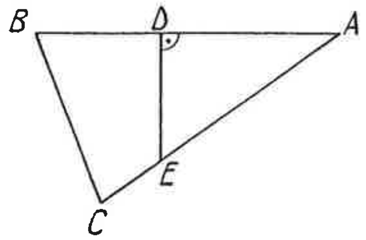
4. Ein Kellner hat bei Arbeitsbeginn Fünf –, Zwei – und Einfränkler mit einem Summenwert von *230 Fr.*, wobei die Zahl der *5 Fr.*- Stücke ein Drittel der Summe aus Zwei – und Einfränklern beträgt. Bei Arbeitsschluss zeigt sich bezüglich der Fünf –, Zwei – und Einfränkler gegenüber Arbeitsbeginn folgende Situation:
Der Summenwert ist um *35 Fr.* höher, die Anzahl der Fünf – und Zweifränkler ist vertauscht und es sind 7 Einfränkler weniger.
Berechnen Sie die Anzahl der Fünf –, Zwei – und Einfränkler bei Arbeitsbeginn.

2 P

5. $a = 1999^{2000}$; $b = 2000^{1999}$
Welche der beiden Zahlen ist grösser?
Es ist eine numerische Begründung verlangt.

2 P

6. Das dreieckige Grundstück ABC wird durch die Strecke DE in zwei flächeninhaltsgleiche Parzellen geteilt.
Berechnen Sie die Strecke $\overline{AD}$, wenn $\overline{AB} = 16m$, $\overline{AC} = 14m$ und $\overline{BC} = 6m$ messen.

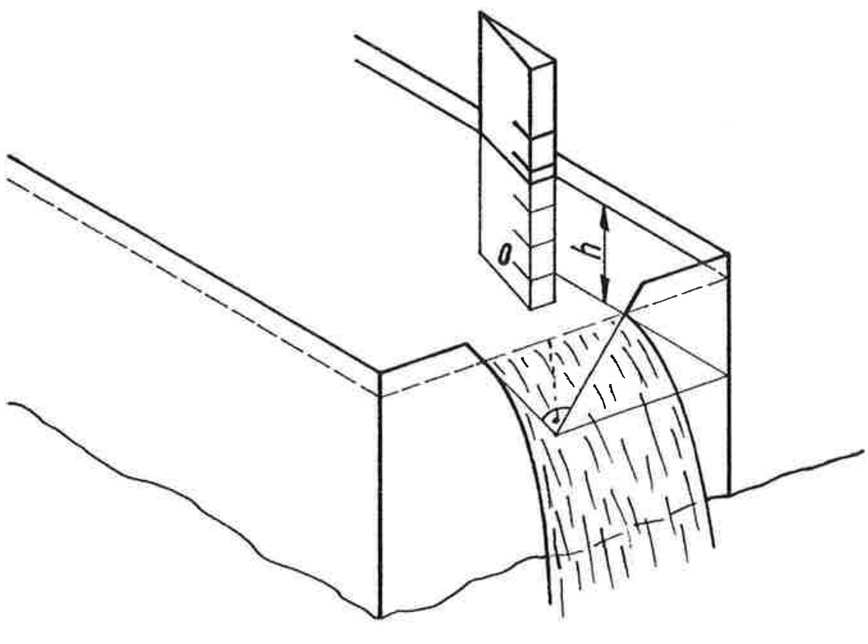


2 P

7. Für die Ermittlung des Volumenstromes $\dot{V}\,[dm^3/s]$ eines kleinen Flusses dient ein quaderförmiges Becken mit V-förmigem Ausfluss. In der Nähe dieses Ausflusses ist ein Stab lotrecht zur Wasseroberfläche verankert.

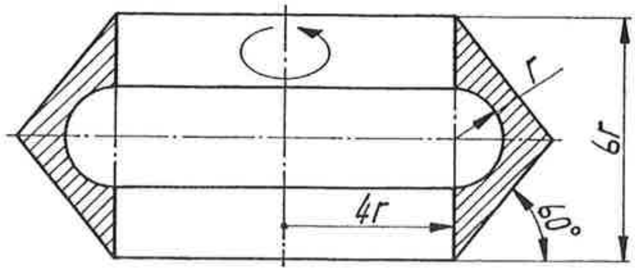
Eine Skala auf dem Stab zeigt den Volumenstrom $\dot{V}$ in $[dm^3/s]$ bei einer konstanten Ausströmungsgeschwindigkeit $v = 0,5\ m/s$ an.

a) Formulieren Sie die Funktionsgleichung für den Volumenstrom $\dot{V}$ in Abhängigkeit der Skalenhöhe h.
b) Zeichnen Sie den Funktionsgrafen im Intervall $0 \leq h \leq 25cm$.
c) Zeichnen Sie die Skala für den Stab, welche die Ausflussmengen $0, 2.5, 5, 7.5$ und $10\ dm^3/s$ anzeigt. Genauigkeit $\pm 4mm$.



4 P

8. Berechnen Sie das Volumen V des gezeichneten Rotationskörpers:



Geben Sie das Resultat in der Form $a \cdot r^3$ auf vier signifikante Ziffern genau an.

Hinweis: Der Flächenschwerpunkt einer Halbkreisfläche befindet sich im Abstand $r_s = (4/3\pi)\, r$ vom Halbkreiszentrum auf der Symmetrieachse.

2 P

9. In einer mit Heisswasser gefüllten Badewanne wurden zu drei Zeitpunkten folgende Wassertemperaturen gemessen:

t[min]	0	5	10
T [°C]	80	70	62

a) Die Temperatur *T [°C]* in Abhängigkeit der Zeit *t [min]* folgt einer Exponentialfunktion der Form $t \rightarrow T = a \cdot b^t + c$. Berechnen Sie die Parameter *a, b und c*.

b) Nach welcher Zeitspanne erreichte das Wasser die angenehme Temperatur von *38 °C*.

c) Zeichnen Sie ein massstäbliches Temperatur-Zeit-Diagramm, $T = f(t)$, im Intervall $0 \leq t \leq 60$ *min*.

d) Der Temperaturverlauf in Abhängigkeit der Zeit soll durch eine lineare Funktion approximiert werden. Der Graph der linearen Funktion soll die Exponentialkurve bei t_1 = *10 min* und t_2 = *60 min* schneiden. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Form $T_G = mt + n$.

5 P

10. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, welcher vom Punkt $A(2,\ 1,\ -5)$ in Richtung des Vektors $\vec{r} = (3, -5, 4)$ um 20 Längeneinheiten entfernt liegt. Koordiantenwerte auf vier signifikante Ziffern genau.

2 P

11. Im Sporttoto muss für 13 Spiele vorausgesagt werden, welche Mannschaft gewinnt oder ob unentschieden gespielt wird. Eine Tipp-Kolonne besteht also aus 13 Voraussagen, exakt eine pro Spiel.

a) Wieviele unterschiedliche Tipp-Kolonnen gibt es?

b) Wieviele Tipp-Kolonnen für fünf richtige Tipps sind möglich?

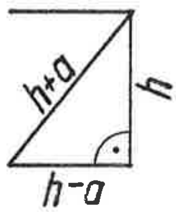
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit in *[°/oo]* für 11 richtige Tipps?

3 P

Lösungen

Pte

1.

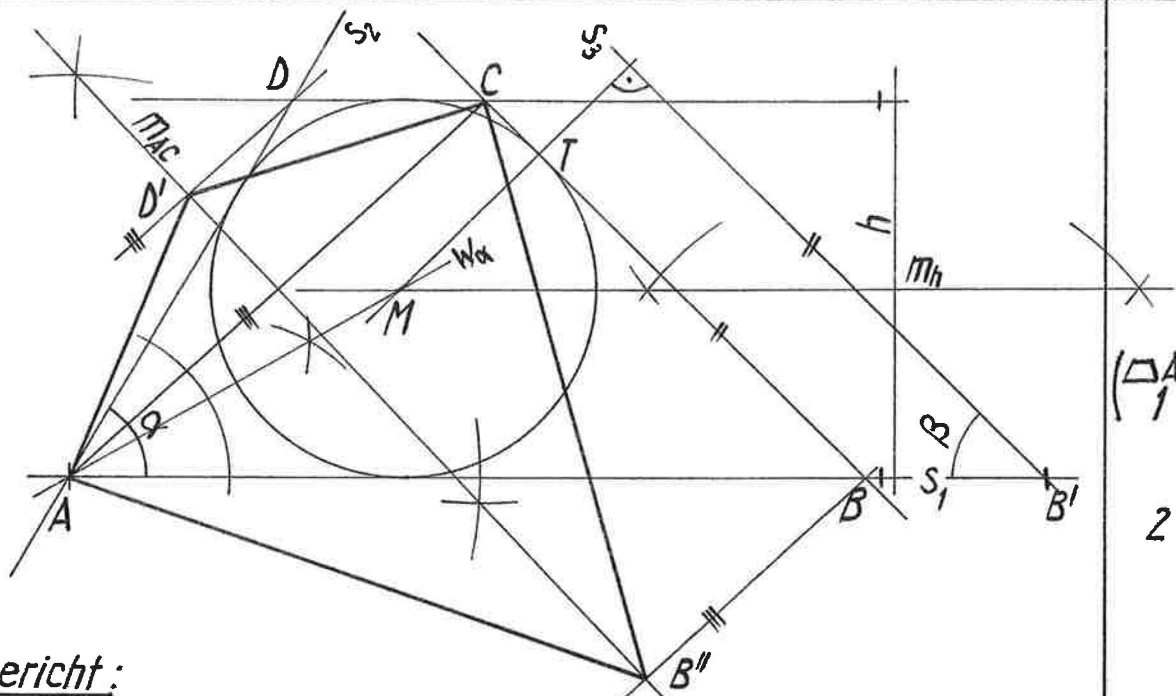


$$(h+a)^2 = h^2 + (h-a)^2$$ (0.5)

$$h^2 = 4ah$$

$$\underline{\underline{h = 4a}}$$ 1

2.



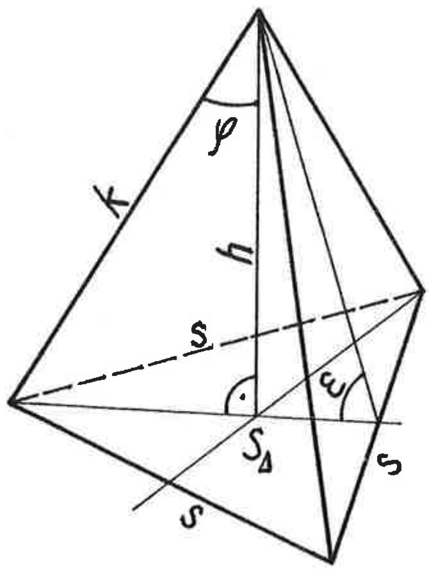
(△ABCD 1)

2

K'Bericht:

1. $\alpha(\overline{s_1,s_2}) = 60° \cap \parallel(s_1; h=5cm) = \{D\};\ s_1 \cap s_2 = \{A\}$
2. $w_\alpha \cap m_h = \{M\};\ B' \in s_1;\ -\beta(\overline{s_1,s_3}) = 45°;\ s_1 \cap s_3 = \{B'\}$
3. $\odot(M; h/2) \cap \perp(s_3; M) = \{T; T'\}$
4. $\parallel(s_3; T) \cap (s_1 \wedge \parallel(s_1; h)) = \{B; C\};$ ⏢ABCD (0.5)
5. $m_{AC} \cap [\parallel(AC; D) \wedge \parallel(AC; B)] = \{D'; B''\}$
6. Drachen-VE $AB''CD'$ 1

3.a.



b. $\tan\varphi = \frac{\cancel{2}\cdot s\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\cancel{2}\cdot h} = \frac{8\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 10}\left[\frac{cm}{cm}\right]$

$\underline{\tan\varphi = 0.461'880}$

$\therefore\ \underline{\underline{\varphi = 24.79°}}$

c. $\tan\varepsilon = \frac{h\cdot 3\cdot 2}{1\cdot s\cdot\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,\frac{h}{s} = 2\sqrt{3}\,\frac{10}{8}\left[\frac{cm}{cm}\right]$

$\tan\varepsilon = 4.330'127$

$\therefore\ \underline{\underline{\varepsilon = 77.00°}}$

a. 1
b. 1
c. 1

Pte

4. u 5 Fr. – Stücke, v 2 Fr. – Stücke, w 1 Fr. – Stücke $\Big\}$ bei Arbeitsbeginn

<u>1. Aussage:</u> $\underline{5u + 2v + w = 230}$ 1)

<u>2. Aussage:</u> $u = \frac{1}{3}(v+w)$ 2Gl ✓ ev. $\boxed{2y}$

$\therefore$ $\underline{3u - v - w = 0}$ 2)

<u>3. Aussage:</u> $5v + 2u + w - 7 = 230 + 35$

$\therefore$ $\underline{2u + 5v + w = 272}$ 3) (1)

<u>1)+2)</u> $8u + v = 230$ 4)

<u>3)−1)</u> $-3u + 3v = 42$

$\underline{-u + v = 14}$ 5)

<u>4)−5)</u> $9u = 216$

$\underline{\underline{u = 24}}$ 1 ✓

5); $u \longrightarrow$ $\underline{\underline{v = 38}}$ (0.5) 2 ✓

2); u; $v \longrightarrow$ $\underline{\underline{w}} = 3u - v = 3 \cdot 24 - 38 \; \underline{\underline{= 34}}$ 2

---

5. $a = 1'999^{2000}$ | $b = 2'000^{1'999}$ je(0.5) lga oder lgb ✓

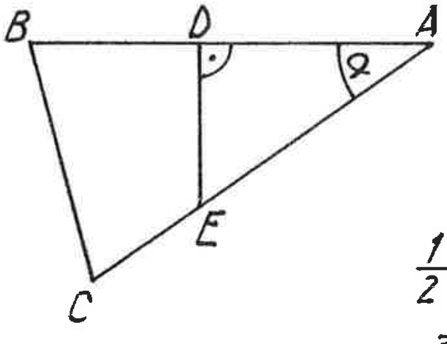
$\underline{\lg a} = 2000 \cdot \lg 1'999 \approx \underline{6'602}$ | $\underline{\lg b} = 1'999 \cdot \lg 2'000 \approx \underline{6'599}$

<u>ALSO:</u> $\underline{\underline{a > b}}$ 2

---

6. $\overline{AB} = c = 16\,m$; $\overline{AC} = b = 14\,m$; $\overline{BC} = a = 6\,m$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \quad \therefore \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{14^2+16^2-6^2}{2 \cdot 14 \cdot 16} \left[\frac{m^2}{m^2}\right]$



$\cos\alpha = 0.928'571$

$\therefore$ $\underline{\underline{\alpha = 21.787°}}$ (0.5) ✓

$A_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} A_{\Delta ABC}$ = 20.7846 cm² 41,569 m² $A_{\Delta ABC}$ (0.5)

$\frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha \quad | \; \overline{DE} = \overline{AD} \cdot \tan\alpha$

$\overline{AD}^2 \cdot \tan\alpha = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha \quad | \; \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (1) ✓

$\overline{AD} = \sqrt{0.5 \cdot bc \cdot \cos\alpha}$

$= \sqrt{0.5 \cdot 14 \cdot 16 \cdot \cos 21.787°} \; [\sqrt{m^2}]$

$\underline{\underline{\overline{AD} = 10.198\,m}}$ 2

7.a. $\underline{\underline{h \longrightarrow \dot{V}}} = A_\Delta \cdot v \; \underline{\underline{= h^2 v}} \quad [m^2 \cdot \frac{m}{s} = \frac{m^3}{s}]$ 1

<u>WENN:</u> $v = 0.5\,m/s$; h in $[mm]$; $\dot{V}$ in $[dm^3/s]$

$\underline{\dot{V}} = 0.5\,h^2 \frac{10 \cdot 1}{1 \cdot 10^4} \left[\frac{m \cdot mm^2 \cdot dm \cdot dm^2}{s \cdot m \cdot mm^2}\right] = \underline{5 \cdot 10^{-4} h^2 \frac{l}{s}}$ +(0.5)

		Pte

7.b.

h [dm]	$\dot V$ [dm³/s]
0	0
0.5	1.25
1.0	5
1.5	11.25
2.0	20
2.5	31.25

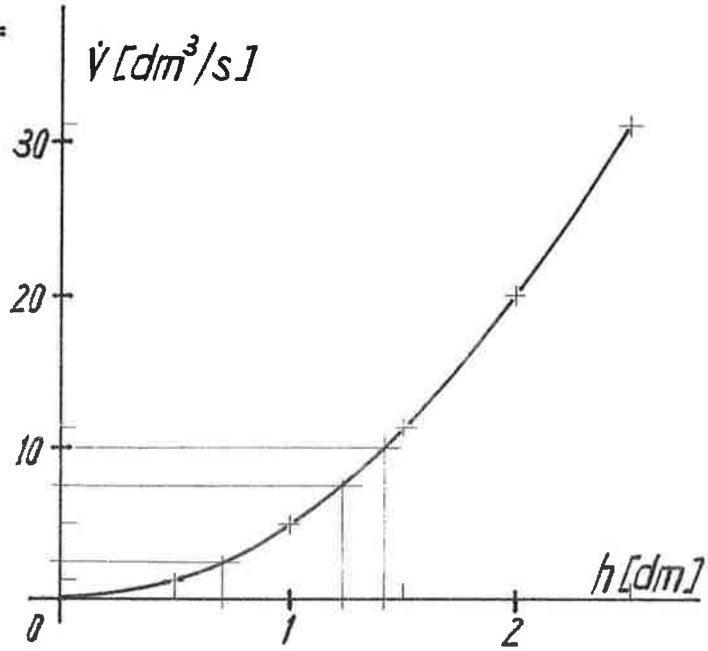


Tabelle (1)

2

7.c.

h [mm]: 0, 71, 100, 122, 141

$\dot V$ [dm³/s]: 0, 2.5, 5, 7.5, 10

(0.5 ± 4mm) 1

8.

$$V = V_{\triangleright} - V_{D}$$

(0.5) (0.5)

$$= 2\pi\left(4r+\frac{1\cdot 3r}{3\sqrt{3}}\right)\cdot 3r\,\frac{3r}{\sqrt{3}} \quad - 2\pi\left(4r+\frac{4}{3\pi}r\right)\frac{1}{2}\pi r^2 \qquad (1)$$

$$= r^3\left[2\pi\cdot 3\left(4\sqrt{3}+1\right) \quad - \frac{\pi}{3}(12\pi+4)\right]$$

$[24\pi\sqrt{3}+6\pi]$

Ru -(0

$$\underline{\underline{V \approx 105.8\,r^3}} \quad (105.775'902\,r^3) \qquad 2$$

9.a.

$$\left.\begin{aligned} ab^0 + c &= 80 \\ ab^5 + c &= 70 \\ ab^{10} + c &= 62 \end{aligned}\right] \text{[°C]} \quad a,b,c = \ldots!$$

1)
2)
3)

(1)

1) $\longrightarrow$ $\underline{a + c = 80}$ 4)

$\underline{1)-2)}$ $a(1-b^5) = 10$

$\therefore$ $\underline{a = \dfrac{10}{1-b^5}}$ 5)

$\underline{2)-3)}$ $a(b^5-b^{10}) = 8$

$\therefore$ $\underline{a = \dfrac{8}{b^5(1-b^5)}}$ 6)

$\underline{5)\equiv 6)}$ $\longrightarrow$ $\underline{b = \sqrt[5]{0.8} \approx 0.956'352}$

$\underline{b\ \text{IN}\ 5)}$ $\longrightarrow$ $\underline{\underline{a = 50}}$

$\underline{4);a}$ $\longrightarrow$ $\underline{\underline{c = 30}}$

1✓ 2✓ }(0.

2

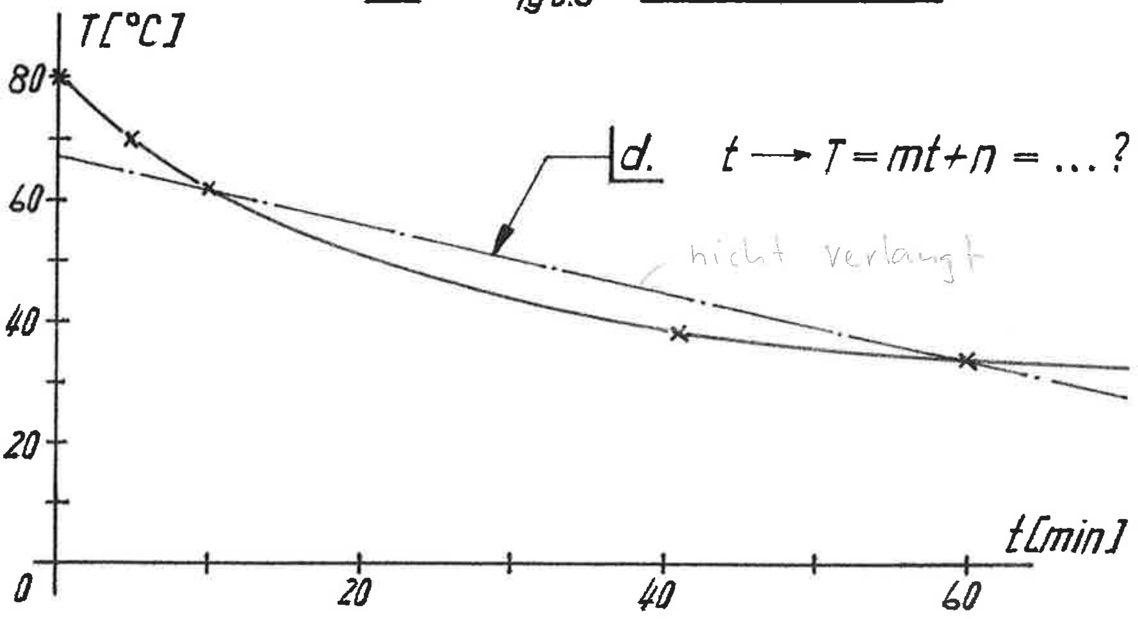
b. $a;b;c$ $\longrightarrow$ $\underline{t \to T = 50\cdot 0.8^{t/5} + 30}$ [°C]

$\underline{T = 38\,°C}$: $38 = 50\cdot 0.8^{t/5} + 30$

$\therefore$ $0.8^t = (4/25)^5$

		Pte
9.b. Forts	$t \cdot \lg 0.8 = 5 \cdot \lg(4/25)$	
	$\underline{\underline{t}} = 5\,\dfrac{\lg 0.16}{\lg 0.8} = \underline{\underline{41.063\ [min]}}$	1

c.



1

d. $\underline{T_{60}} = 50 \cdot 0.8^{60/5} + 30\ [°C] = \underline{33.436\,°C}\ (33.435'974\,°C)$

$\underline{m} = \dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{33.435'974 - 62}{60-10} = \underline{-0.571'281}$ (0.5)

$\underline{n} = |\Delta t \cdot m| + T_{60} = 60 \cdot 0.571'2 \ldots + 33.43 \ldots = \underline{67.712'8}$

$\underline{\underline{t \longrightarrow T = -0.571'3\,t + 67.71\ [°C]}}$ 1

---

10. $\vec{OP} = \vec{OA} + k \cdot \vec{r} \quad \Big|\ \underline{k} = \dfrac{20}{|\vec{r}|} = \dfrac{20}{\sqrt{3^2+(-5)^2+4^2}} = \dfrac{20}{5\cdot\sqrt{2}} = \underline{2\sqrt{2}}$ (1)

$\underline{\underline{\vec{OP}}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} + 2\sqrt{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \approx \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10.49 \\ -13.14 \\ 6.314 \end{bmatrix}}}$ 2

11.a. 1, 1, X, 2, 1, ... — 13 ZEILEN ZU 3 MOEGLICHKEITEN

$\underline{\underline{Z_{tot}}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n=13} = 3^{13} = \underline{\underline{1'594'323}}$ 1

b. <u>1.SCHRITT</u>: 5 RICHTIGE ZEILEN MARKIEREN

$\longrightarrow C_R(13,5) = \dfrac{13!}{8!\cdot 5!} = \underline{1'287}$ MOEGLICHKEITEN

<u>2.SCHRITT</u>: FUER FALSCHE ZEILEN VERBLEIBEN (0.5)

$\longrightarrow Z_f = 2^{(13-5)} = \underline{2^8 = 256}$ <u>MOEGLICHKEITEN</u>

<u>3.SCHRITT</u>: MULT-REGEL ⟶ ALLE MOEGL TIP-KOLONNEN FUER

5 RICHTIGE TIP's : $\underline{\underline{Z_5}} = C_R \cdot Z_f = 1'287 \cdot 256 = \underline{\underline{329'472}}$ 1

c. $\underline{Z_{11}} = C_R(13,11) \cdot Z_f = \dfrac{13!}{2!\cdot 11!} \cdot 2^2 = \underline{312}$ (0.5)

<u>WAHRSCHEINLICHKEIT</u> (LAPLACE) FUER "11er" :

$\underline{\underline{P(11er)}} = \dfrac{Z_{11}}{Z_{tot}} = \dfrac{312}{1'594'323} = \underline{1.956'943' \ldots 10^{-4}} \approx \underline{\underline{0.196\ ‰}}$ 1