Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben ist die quadratische Funktion $f: \quad y = -2x^2 + 8x - 4$.

a) Ermitteln Sie den Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *f* in das Koordinatensystem auf der übernächsten Seite.

c) Der Graph der Funktion f_1 entsteht durch Spiegelung des Graphen der Funktion *f* an der Geraden $y = 1$.
Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion f_1 in der Polynomform
$y = a\,x^2 + b\,x + c$.

d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_1 in das Koordinatensystem.

e) Der Graph der Funktion f_2 entsteht durch Verschiebung des Graphen von *f* um den Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion f_2 in der Polynomform
$y = a\,x^2 + b\,x + c$.

f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_2 in das Koordinatensystem.

Lösung zu a)	**Punkte**
$y = (-2)\left(x^2 - 4x + 2\right)$	0.5
$y = (-2)\left(x^2 - 4x + 2^2 - 2\right)$	
$y = (-2)\left((x-2)^2 - 2\right)$	0.5
$y = (-2)(x-2)^2 + 4$	0.5
Scheitelpunkt: $S\,(2/4)$	0.5

Lösung zu b)	**Punkte**
Einzeichnen des Graphen	1

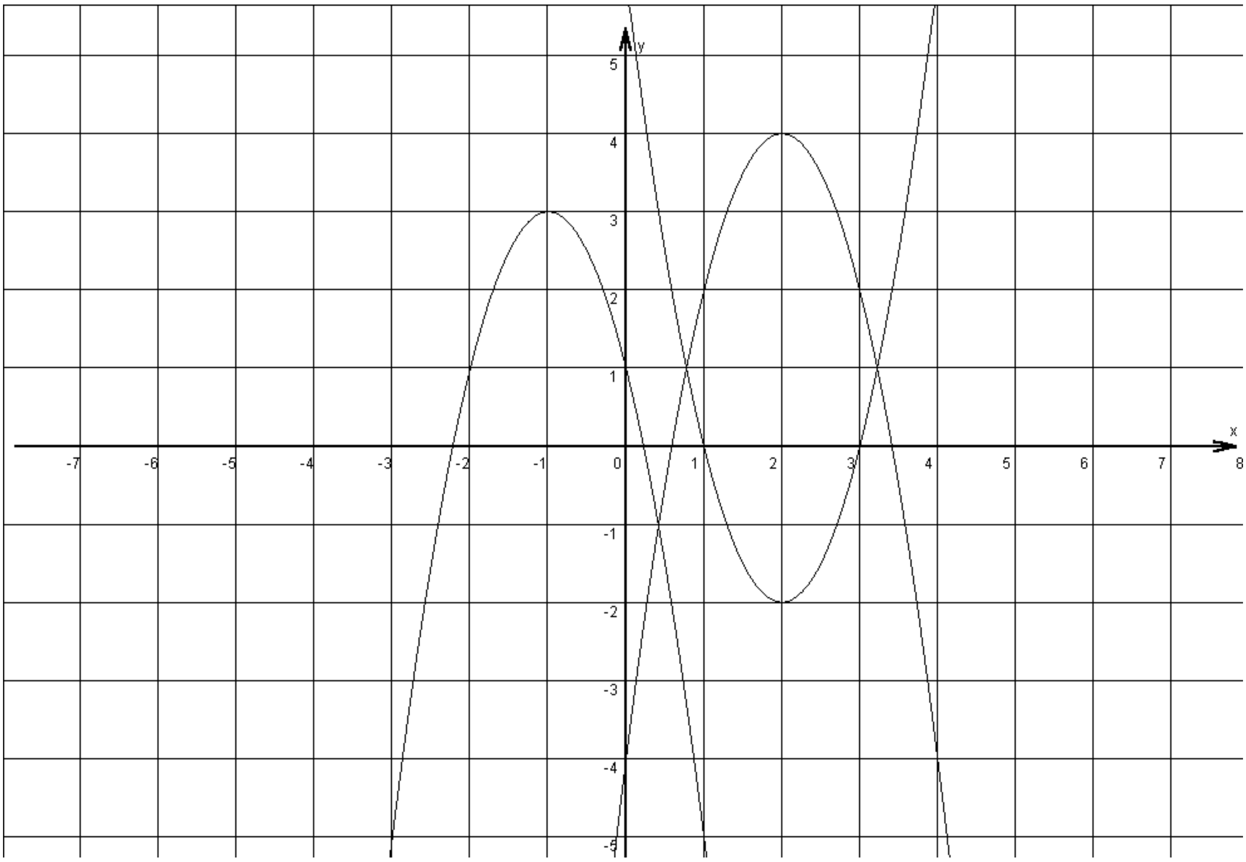
Arbeitsblatt zu Aufgabe 1

Lösung zu c)	**Punkte**
S spiegeln → $S_1\left(2/-2\right)$	1
$f_1: \quad y = 2\left(x-2\right)^2 - 2$	0.5
$y = 2\left(x^2 - 4x + 4\right) - 2$	0.5
$y = 2x^2 - 8x + 8 - 2$	
$\underline{\underline{y = 2x^2 - 8x + 6}}$	0.5

Lösung zu d)	**Punkte**
Einzeichnen des Graphen	1

Lösung zu e)	**Punkte**
S verschieben → $S_2\left(-1/3\right)$	1
$f_2: \quad y = \left(-2\right)\left(x+1\right)^2 + 3$	0.5
$y = \left(-2\right)\left(x^2 + 2x + 1\right) + 3$	0.5
$y = -2x^2 - 4x - 2 + 3$	
$\underline{\underline{y = -2x^2 - 4x + 1}}$	0.5

Lösung zu f)	**Punkte**
Einzeichnen des Graphen	1


y
x
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Der Neuwert einer Maschine beträgt 5000 Franken.
Der Wert der Maschine nimmt jährlich um 6 % ab (d.h. die Abnahme ist nicht linear).

a) Geben Sie den Wert *W* der Maschine in Fr. als Funktion der Zeit *t* in Jahren an.

b) Wie viele ganze Jahre dauert es, bis die Maschine weniger als die Hälfte ihres Neuwertes wert ist?

c) Wie viele Prozente vom ursprünglichen Neuwert ist die Maschine nach 20 Jahren noch wert?

Lösung zu a)	**Punkte**
$y(t) = 5000 \cdot 0.94^t$	1

Lösung zu b)	**Punkte**
$2500 = 5000 \cdot 0.94^t$	1
$0.5 = 0.94^t$	
$\lg 0.5 = t \cdot \lg 0.94$	1
$t = \dfrac{\lg 0.5}{\lg 0.94} \approx 11.202$	1
Es dauert **12 Jahre**, bis die Maschine weniger als die Hälfte ihres Kaufpreises wert ist.	1

Lösung zu c)	**Punkte**
$y(20) = 5000 \cdot 0.94^{20} \approx 1450.53$	1
$\dfrac{1450.53 \cdot 100\%}{5000} \approx \underline{\underline{29.01\,\%}}$	1

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Eine Baugesellschaft hat ein Grundstück von 8000 m^2 gekauft.
Es ist geplant, auf dem Grundstück Einfamilienhäuser und Zweifamilienhäuser zu errichten.

Für ein Einfamilienhaus beansprucht man eine Grundstücksfläche von 200 m^2, für ein Zweifamilienhaus werden 500 m^2 benötigt.

Die Kosten für ein Einfamilienhaus betragen 600'000 Franken; die Kosten für ein Zweifamilienhaus 750'000 Franken.
Insgesamt verfügt die Gesellschaft über ein Kapital von 15'000'000 Franken für den Bau der Häuser.

Gemäss Bauplan dürfen nicht mehr als 14 Einfamilienhäuser gebaut werden.
Ferner darf die Anzahl Zweifamilienhäuser höchstens doppelt so gross sein wie die Anzahl Einfamilienhäuser.

Wie viele Ein – und Zweifamilienhäuser sollen auf dem Grundstück gebaut werden, wenn möglichst viele Familien auf dem Grundstück wohnen sollen?

Gehen Sie zur Lösung der Aufgabe wie folgt vor:

Bezeichnen Sie mit x die Anzahl Einfamilienhäuser und mit y die Anzahl Zweifamilienhäuser.

a) Geben Sie die vier Ungleichungen an, welche die im Text formulierten Einschränkungen berücksichtigen.

b) Stellen Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems im Koordinatensystem auf der übernächsten Seite grafisch dar.
Wählen Sie eine geeignete Skaleneinheit im Koordinatensystem.

c) Geben Sie die Funktionsgleichung für die Anzahl Familien z in Abhängigkeit von der Anzahl Ein – und Mehrfamilienhäusern an.

d) Ermitteln Sie, wie viele Ein – und Zweifamilienhäuser auf dem Grundstück gebaut werden sollen, damit die Anzahl der auf dem Grundstück wohnenden Familien maximal ist.
Wie gross ist die maximale Anzahl Familien?

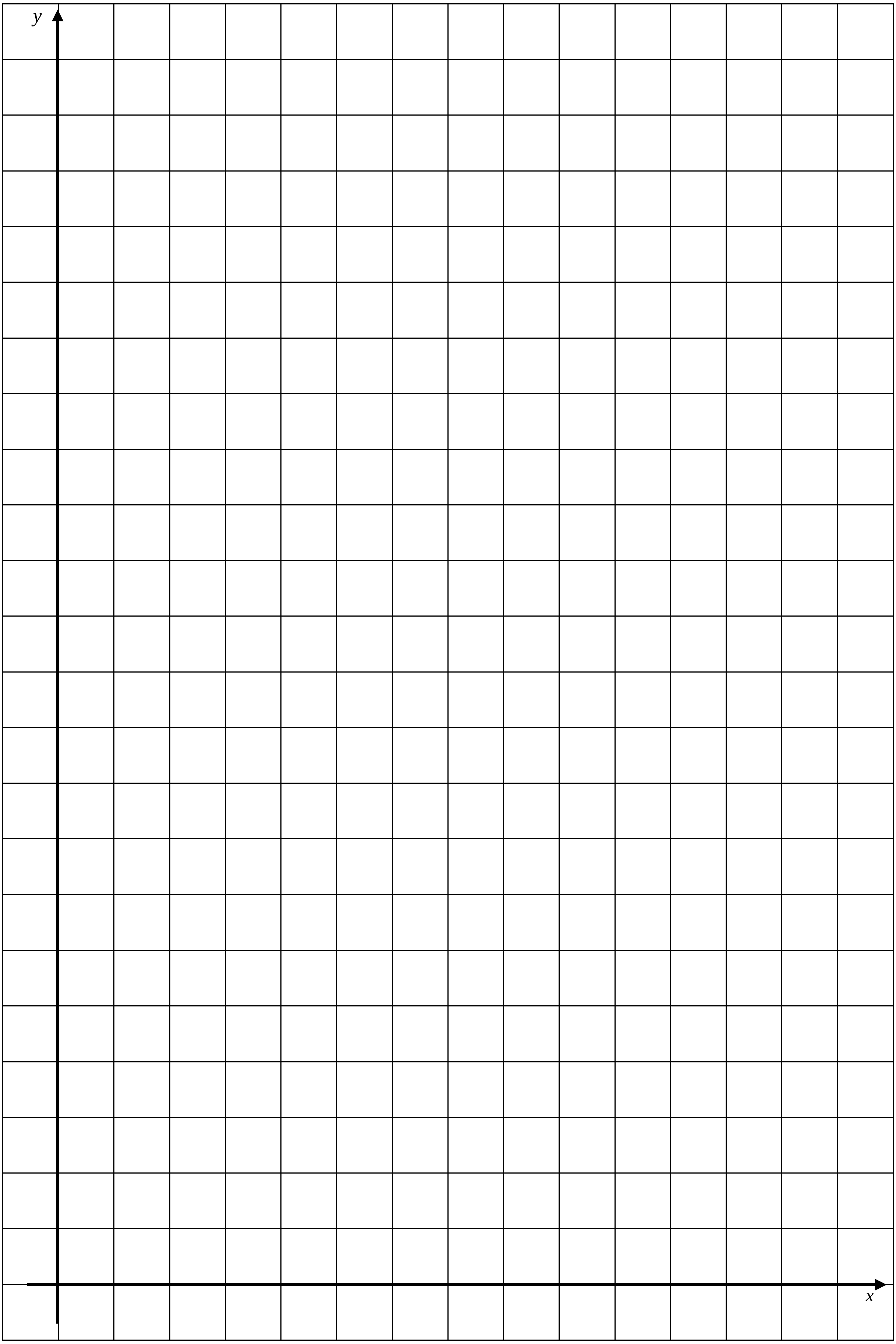
Arbeitsblatt zu Aufgabe 3

Lösung zu a)	**Punkte**
1. $200x+500y\leq 8000$	0.5
2. $600'000x+750'000y\leq 15'000'000$	0.5
3. $x\leq 14$	0.5
4. $y\leq 2x$	0.5

Lösung zu b)	**Punkte**
Auflösen der Ungleichungen nach y	
1. $y\leq -\frac{2}{5}x+16$	0.5
2. $y\leq -\frac{4}{5}x+20$	0.5
Skaleneinheit festlegen	0.5
Einzeichnen der vier Geraden: je 0.5 Punkte	2
Planungspolygon	1

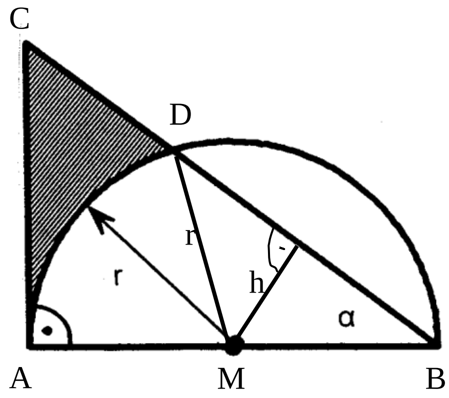
Lösung zu c)	**Punkte**
$z=x+2y$ → maximal!	1

Lösung zu d)	**Punkte**
Zielfunktion nach y auflösen: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$	0.5
Parallele zur Zielgeraden einzeichnen	0.5
Zielgerade durch Parallelverschiebung zeichnen	0.5
Koordinaten des Eckpunktes ablesen	1
Lösung: 10 Einfamilienhäuser, 12 Zweifamilienhäuser	1
Anzahl Familien: $10+2\cdot 12=\underline{\underline{34}}$	1


y
x

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des schraffierten Reststückes für $r = 6\,cm$ und $\alpha = 30^o$.



Lösung	**Punkte**
Ergänzte Skizze	0.5
$A_{schraffiet} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta BDM} - A_{Sektor\,AMD}$	1
Berechnung von $A_{\Delta ABC}$	
$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \tan\alpha$	0.5
$\overline{AC} = 2r \cdot \tan\alpha$	0.5
$= 2 \cdot 6\,cm \cdot \tan 30^o = 4 \cdot \sqrt{3}\,cm \approx 6.93\,cm$	0.5
$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB}$	0.5
$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3}\,cm \cdot 12\,cm = 24 \cdot \sqrt{3}\,cm^2 \approx 41.57\,cm^2$	0.5
Berechnung von $A_{\Delta BDM}$	
$h = r \cdot \sin\alpha$	0.5
$= 6\,cm \cdot \sin 30^o = 3\,cm$	0.5

$\overline{BD} = 2 \cdot \sqrt{r^2 - h^2}$ 1

$= 2 \cdot \sqrt{(6\,cm)^2 - (3\,cm)^2} = 2 \cdot \sqrt{27\,cm^2} = 6 \cdot \sqrt{3}\,cm \approx 10.39\,cm$ 0.5

$A_{\Delta BDM} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{BD}$ 0.5

$= \frac{1}{2} \cdot 3\,cm \cdot 6 \cdot \sqrt{3}\,cm = 9 \cdot \sqrt{3}\,cm^2 \approx 15.59\,cm^2$ 0.5

Berechnung von $A_{Sektor\,AMD}$

$A_{Sektor\,AMD} = \frac{r^2 \pi \cdot 60^o}{360^o}$ 1

$= \frac{(6\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 60^o}{360^o} = 6 \cdot \pi\,cm^2 \approx 18.85\,cm^2$ 0.5

Berechnung von $A_{schraffiert}$

$A_{schraffiert} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta BDM} - A_{Sektor\,AMD}$

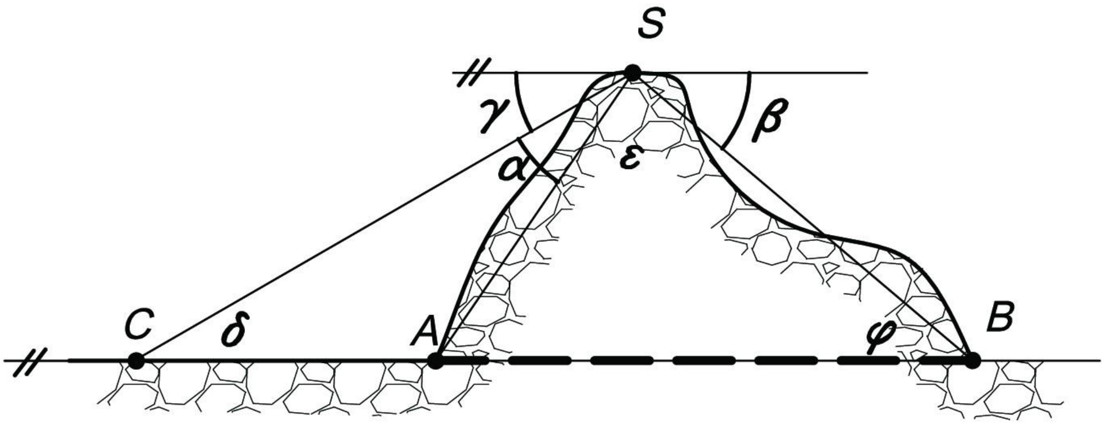
$= 24 \cdot \sqrt{3}\,cm^2 - 9 \cdot \sqrt{3}\,cm^2 - 6 \cdot \pi\,cm^2$ 0.5

$= \left(15 \cdot \sqrt{3} - 6 \cdot \pi\right) cm^2 = 3 \cdot \left(5 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \pi\right) cm^2 \approx \underline{\underline{7.13\,cm^2}}$ 0.5

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Vor dem Bau eines horizontal verlaufenden Tunnels soll seine Länge $\overline{AB}$ bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird im Tal eine ebenfalls horizontale Standlinie $\overline{AC} = 353\,m$ abgesteckt, die mit der Bergspitze S sowie dem Tunneleingang B in einer Vertikalebene liegt.
In S werden folgende Winkel gemessen: $\alpha = 26^o$, $\beta = 40^o$ und $\gamma = 32^o$.
Berechnen Sie aus diesen Angaben die Länge $\overline{AB}$ des Tunnels.

Lösung



	Punkte
$\delta = \gamma = 32^o$	1
$\dfrac{\overline{AS}}{\sin\delta} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin\alpha}$	1
$\overline{AS} = \dfrac{\overline{AC}\cdot\sin\delta}{\sin\alpha}$	1
$\overline{AS} = \dfrac{353\,m\cdot\sin 32^o}{\sin 26^o} \approx 426.72\,m$	1
$\varepsilon = 180^o - \alpha - \beta - \gamma = 180^o - 26^o - 40^o - 32^o = 82^o$	1
$\varphi = \beta = 40^o$	1

Arbeitsblatt zu Aufgabe 5

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\varepsilon} = \frac{\overline{AS}}{\sin\varphi}$$ 1

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AS}\cdot\sin\varepsilon}{\sin\varphi}$$ 1

$$\overline{AB} = \frac{426.72\ m\cdot\sin 82^o}{\sin 40^o} \approx \underline{\underline{657.40\ m}}$$ 1

Aufgabe 6 (12 Punkte)

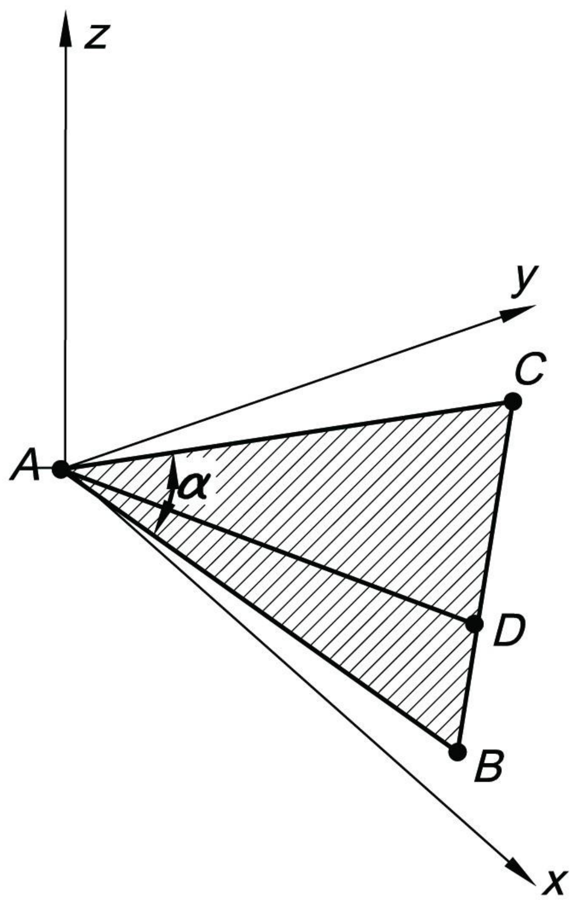
Gegeben ist ein Dreieck ABC gemäss Skizze. Es gilt: $\overline{BD} = \frac{1}{4}\overline{BC}$.

Die Koordinaten der Eckpunkte sind A (0 / 0 / 0), B (5 / 3 / 1) und C (3 / 6 / 4).

a) Berechnen Sie die Grösse des Winkels α.

b) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Dreiecksfläche ABC.

c) Wie lauten die Koordinaten des Punktes D ?



Lösung zu a)	**Punkte**
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert\cdot\left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert\cdot\cos\alpha$	1
$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert\cdot\left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert}$	0.5
$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$	0.5
$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}$	0.5
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\cdot3+3\cdot6+1\cdot4=37$	0.5
$\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\sqrt{5^2+3^2+1^2}=\sqrt{35}$	0.5
$\left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert=\sqrt{3^2+6^2+4^2}=\sqrt{61}$	0.5
$\cos\alpha=\dfrac{37}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{61}}\approx0.801$	0.5
$\underline{\underline{\alpha\approx36.80^o}}$	1

Lösung zu b)	**Punkte**
Formel für Dreiecksflächenberechnung:	
$A_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert^2\cdot\left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$	1
$A_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{35\cdot61-37^2}\approx\underline{\underline{13.84}}$	2

Variante über Winkel

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\lvert \overrightarrow{AB} \right\rvert \cdot h_c$	1*
$h_c = \left\lvert \overrightarrow{AC} \right\rvert \cdot \sin\alpha \approx \sqrt{61} \cdot \sin 36.80^o \approx 4.68$	1*
$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\lvert \overrightarrow{AB} \right\rvert \cdot h_c \approx \frac{1}{2} \cdot \sqrt{35} \cdot 4.68 \approx \underline{\underline{13.84}}$	1*

Lösung zu c)	**Punkte**
B (5 / 3 / 1), C (3 / 6 / 4), D (x / y / z)	
$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$	1
$\begin{pmatrix} x-5 \\ y-3 \\ z-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	1
$\left\lvert \begin{array}{l} x-5 = -\frac{1}{2} \\ y-3 = \frac{3}{4} \\ z-1 = \frac{3}{4} \end{array} \right\rvert$	0.5
$x = 4.5 \quad y = 3.75 \quad z = 1.75$	0.5
$\underline{\underline{D\left(4.5/3.75/1.75\right)}}$	0.5