Berufsmaturitätsprüfung 2005

Mathematik

BMT4b & BMZb

Name: ____________________ Klasse: BMT ❒ oder BMZ ❒

Wichtige Hinweise:

- Prüfungsdauer: 240 Minuten (keine Pause)
- Prüfungsbogen: Der Prüfungsbogen umfasst 4 Blätter.
- Es sind 9 Aufgaben zu lösen. Die zu erreichende Punktzahl pro Aufgabe steht jeweils in eckigen Klammern.
- Die maximal mögliche Punktzahl beträgt 53 Punkte.
- Auf alle Lösungsblätter müssen den **Namen** schreiben!
- Bei allen Aufgaben sind die Überlegungen und Schritte, die zur Lösung führen, darzustellen. Insbesondere betrifft dies auch die über die gewöhnliche Arithmetik hinausgehende Verwendung des CAS-Rechners.
- Folgende Symbole definieren den **CAS-Rechner-Einsatz**:
  - ✍ Die Aufgabe ist von Hand auszuführen; Solve-Tasten oder sonstige Lösungstasten resp. Programme dürfen nur als persönliches Kontrollinstrument eingesetzt werden.
  - 💻 Die Aufgabe kann von Hand gelöst werden; Solve-Tasten oder sonstige Lösungstasten resp. Programme dürfen eingesetzt werden.
- Lösungen sind, wo nichts anderes gesagt wird, exakt anzugeben (Wurzeln oder π-Vielfache stehen lassen).
- Ordnen Sie am Schluss der Prüfung die Aufgaben nach den Nummern ein.
- Sie können mit Bleistift schreiben.
- **Hilfsmittel:**
  CAS-Taschenrechner (ohne Kommunikationsmöglichkeiten), Formelsammlungen ohne Beispiele, Zeichnungswerkzeug
- Der Austausch von Hilfsmitteln ist nicht erlaubt!
- **Natels müssen ausgeschaltet und versorgt werden.**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Gelöste Aufgabe*	**a)❒b)❒**	**a)❒b)❒**	**a)❒b)❒**	**❒**	**❒**	**a)❒b)❒c)❒**	**a)❒b)❒**	**❒**	**a)❒b)❒**

* Alle von Ihnen gelösten oder teilweise gelösten Aufgaben markieren Sie mit einem Kreuz!

Erreichte Punkte	Prüfungsnote

1✍ Unabhängige Teilaufgaben

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{l} ax - 2y = 1 \\ x - ay = a \end{array} \right|$ in Abhängigkeit des Parameters a.

Klären Sie ab, ob es a-Werte mit keiner oder mehreren Lösungen gibt. [4P]

b) Bestimmen Sie p so, dass für die beiden Lösungen von $x^2 + px + 4.5 = 0$ gilt: die eine ist doppelt so gross ist wie die andere. [3P]

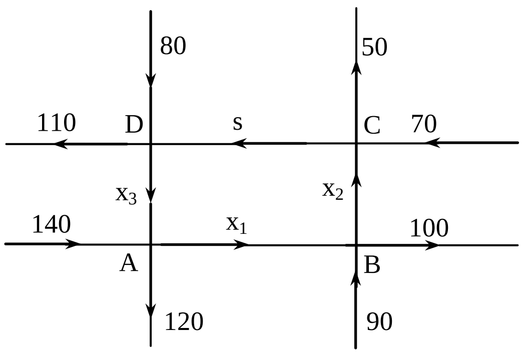
2✍ Messungen über das Fahrverhalten einer U-Bahn zwischen zwei Haltestellen ergaben folgende Zusammenhänge zwischen dem Weg s in Meter und der Zeit t in Sekunden:

1. Abschnitt $s_1 = 0.8t^2$ für $0 \le t \le 16$
2. Abschnitt $s_2 = 25.6(t - 16) + 204.8$ für $16 \le t \le 40$
3. Abschnitt $s_3 = -0.64(t - 60)^2 + 1075.2$ für $40 \le t \le 60$

a) Stellen Sie den Gesamtverlauf massstäblich genau im s(t)-Diagramm dar. [3P]

b) Berechnen Sie den Haltestellenabstand, die Geschwindigkeit im 2. Abschnitt und die Durchschnittsgeschwindigkeit der U-Bahn während des Fahrverhaltens. [3P]

3💻 Nebenstehend ist ein Ausschnitt eines Einbahnstrassennetzes einer Grosstadt abgebildet. Die Pfeile bezeichnen die erlaubten Fahrtrichtungen. Die angegebenen Zahlen und die Grössen s, x_1, x_2, x_3 bezeichnen Verkehrsflüsse in Anzahl Autos pro Stunde, die durchfahren.



a) Berechnen Sie sämtliche Verkehrsflüsse x_i in den einzelnen Strassenabschnitten in Abhängigkeit des Parameters s. [3.5P]

b) Wie gross darf s höchstens sein, wenn die Strasse zwischen A und B wegen Bauarbeiten auf maximal 30 Autos/h beschränkt ist? [1.5P]

4✍ Eine Stadtbibliothek will ihren Bestand an Mathematik- und Physikbüchern erweitern. Es sollen mindestens 50 Mathematikbüchern und mindestens 80 Physikbüchern, insgesamt aber mindestens 200 Bücher angeschafft werden. Für die Anschaffung stehen maximal 9'000 CHF zur Verfügung. Durchschnittlich kosten Mathematikbücher 32 CHF und Physikbücher 40 CHF. Die Wertminderung bei einem Mathematikbuch beträgt 5 CHF, bei einem Physikbuch 6 CHF pro Jahr. Wie viele Bücher jeder Sorte müssen für eine minimale jährliche Wertminderung angeschafft werden und wie hoch ist sie? [6P]

Auszuführende Arbeiten auf dem Weg zur Lösung:

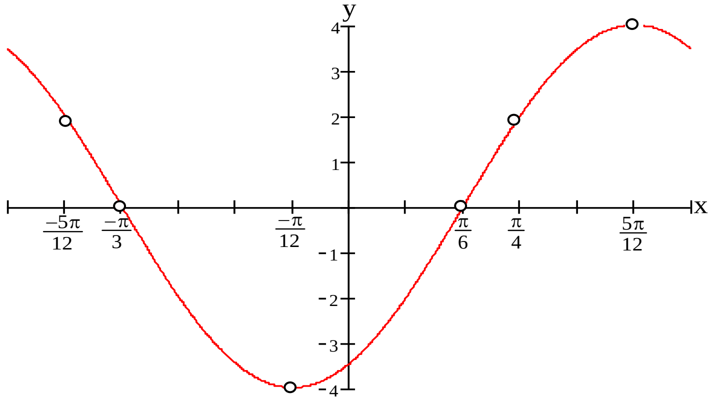
- o Definieren Sie die Variablen.
- o Bestimmen Sie die Bedingungen und die Zielfunktion für das Planungspolygon.
- o Zeichnen Sie ein möglichst grosses Planungspolygon mit der Parallelenschar der Zielfunktion.

5✍ Gegeben sind zwei Punkte A, B durch $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und eine Gerade $G: \vec{r} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Punkt P auf G, für welchen das Dreieck (A, B, P) im Punkt B rechtwinklig ist. [3P]

6✍ Unabhängige Teilaufgaben

a) Bestimmen Sie eine passende Funktionsgleichung zum Graphen. [2.5P]



b) Skizzieren Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ von $f(x) = -x^2$ mit $x \geq 0$ und berechnen Sie $f^{-1}(x)$. [3.5P]

c) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung im Intervall $x \in [\,0\,; 2\pi\,[$:

$5 - 2\cos^2(x) - 7\sin(x) = 0$ [3P]

7✍ Unabhängige Teilaufgaben

a) Es ist bekannt, dass die Intensität $I(x)$ der Sonnenstrahlung beim Eindringen in die Meeresoberfläche exponentiell (Basis e) mit der Tiefe x abnimmt.

a1) Beschreiben Sie $I(x)$ analytisch und grafisch. [2P]

a2) In welchem Verhältnis stehen die Eindringtiefen mit 50% bzw. 25% der Intensität an der Meeresoberfläche? [1P]

a3) Es ist bekannt, dass bei $x = 1\text{m}$ noch 10% der Intensität an der Meeresoberfläche vorhanden ist. In welcher Tiefe sind es noch 50%? [2P]

b) Im Zusammenhang mit der statistischen Lebensdauer gewisser Geräte ist folgende Beziehung wichtig:

$$R = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

Lösen Sie diese nach T auf. [2P]

8✍ Von einem Quadrat im Raum ist folgendes bekannt:

-sein Mittelpunkt M(2 | -16 | 8)

-die Ecke A(6 | -12 | 15)

-der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zum Quadrat.

Berechnen Sie die Koordinaten der drei anderen Ecken. [5P]

(Die Lösungen sind ganzzahlig)

9✍ Der skizzierte allradgelenkte Flugzeug-Schlepper kann die Vorderräder maximal um ± 60° und die Hinterräder maximal um ± 30° lenken. Die Radaufhängungen ABCD bilden ein Rechteck. Die untere Figur zeigt den Schlepper mit maximalen Radauslenkungen, welche die kleinsten Wenderadien ergeben. Berechnen Sie mit den in der Figur eingetragenen bekannten Grössen (Längen in cm) auf cm genau gerundet:

a) zuerst R_1. [2P]

b) dann R_2. [3P]