Berufsmaturitätsprüfung 2006 – Mathematik

Bedingungen

- Die Prüfungsdauer beträgt 240 Minuten (ohne Pause)

- **Grundsätzlich müssen alle Aufgaben von Hand gelöst werden. Der Taschenrechner darf nur für arithmetische Operationen, das Bestimmen von Funktionswerten und allenfalls für das Lösen quadratischer Gleichungen verwendet werden!**

- Formelsammlung:
  - darf alle möglichen Formeln enthalten
  - es dürfen keine Beispiele dazu angegeben werden
  - Skizzen zu den Formeln sind zulässig

- Die Prüfung umfasst die Aufgaben Nr.1 bis Nr. 9. Die jeweils maximal möglichen Punktzahlen sind in eckigen Klammern angegeben.

- Der Austausch von Hilfsmitteln ist verboten.
- Natels müssen ausgeschaltet und versorgt werden.

Name:	Vorname:

Punkte	Note

Name:	Vorname:

1 Unabhängige Aufgaben:

a) Für welche $x \in [0;2\pi]$ ist $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 > 0$? [4]

(Exakte Werte angeben)

b) Bestimmen Sie a so, dass der Punkt $P\left(a+2 \mid a^2 + 12a - 2\right)$ auf der Parabel $y = x^2 + 6x - 3$ liegt. [3]

c) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems $\left| \begin{array}{l} 9 \cdot 3^{x-2} = 9^{y-1} \\ 4^{x-3} = 4 \cdot 2^{y-3} \end{array} \right|$ [4]

d) Berechnen Sie die gesamte Lösungsmenge für das System $\left| \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y - z & = & 2 \end{array} \right|$ [2]

Punkte

Name:	Vorname:

2 Ein Forschungsteam benötigt für den Betrieb einer Sende- und Empfangsanlage Batterien. In den Reisebehältern steht dafür maximal 21'600 cm^3 Platz zur Verfügung. Der Expeditionsleitung werden zwei Sorten Batterien unterschiedlicher Baugrösse angeboten:

- o Sorte A mit einem Volumen von 200 cm^3 und einem Stückpreis von 10 CHF. Diese Batteriesorte liefert ca. 18 h lang Energie.
- o Sorte B mit einem Volumen von 300 cm^3 und einem Stückpreis von 5 CHF. Diese Batteriesorte liefert ca. 16 h lang Energie.

Für die Beschaffung der Batterien ist ein maximales Budget von 500 CHF reserviert.
Wie viele Batterien jeder Sorte sollen gekauft werden, damit die Anlage möglichst lange betrieben werden kann (für den Betrieb ist jeweils nur eine Batterie erforderlich)? Mit insgesamt wie vielen Betriebsstunden kann das Team rechnen? [7]

Verlangt wird:
- das klare Definieren der Variablen,
- das Bestimmen der Bedingungen und der Zielfunktion,
- das massstäbliche Zeichnen des Planungspolygons und der Zielfunktion.

Punkte

Name:	Vorname:

3 Unabhängige Aufgaben:

a) Eine Tierpopulation P hat sich in 5 Jahren von 200 Tieren (zum Zeitpunkt $t = 0$) auf 250 Tiere vergrössert. Die Zahl der Tiere ist auf maximal 1000 beschränkt.
Die zeitabhängige Population wird durch folgendes Modell beschrieben:
$P(t) = b - (b - a) \cdot e^{-\lambda t}$ mit $b > a > 0$ und $\lambda > 0$

a1) Skizzieren Sie $P(t)$ qualitativ (allgemein) und markieren Sie in der Grafik die Parameter a und b. [2]

a2) Berechnen Sie a, b, λ für die obigen Wertangaben. [3]

a3) Nach welcher Zeit t hat sich die Anfangspopulation verdoppelt? [2]

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung:
$\log_a(x^2) - \log_a(x-2) = 5\log_a(3) - \log_a(27)$
Was ist bemerkenswert am Resultat? [3]

Punkte

Name:	Vorname:

4 Unabhängige Aufgaben:

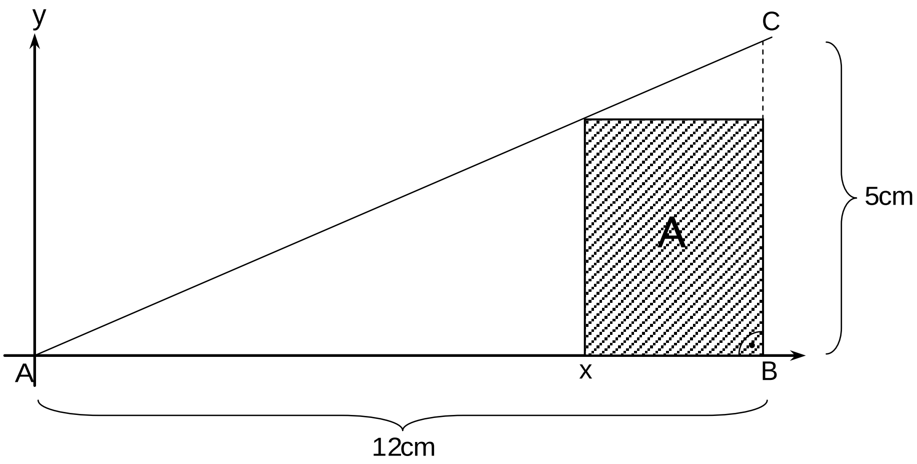
a) Die Graphen der Parabel $y = p(x) = -x^2 + 8x - 7$ und der Geraden $y = g(x) = 1.5x + q$ schneiden sich. Für welche Werte von q gibt es zwei Schnittpunkte mit positiven y–Koordinaten? [4]

b) Die Hyperbel beschrieben durch $y = \frac{a}{x}$ wird so verschoben, dass $x = 2$ senkrechte Asymptote und $y = 1$ horizontale Asymptote ist.
Wie lautet die entsprechende Funktionsgleichung $y = f(x)$?
Bestimmen Sie nun den Parameter a so, dass gilt: $f(3) = 0$ und skizzieren Sie dann die Funktion $g(x) = |f(x)|$ möglichst genau im Intervall $[-2;6]$. [5]

Punkte

Name:	Vorname:

5 Betrachten Sie das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Seitenlängen 12 cm und 5 cm gemäss Figur.



a) Drücken Sie den Flächeninhalt A des schraffierten Rechtecks als Funktion von x aus:
$A = f(x)$ mit $0 < x \leq 12$ [2]

b) Für welchen Wert von x ist der Flächeninhalt maximal? $A_{max} = ?$ [2]

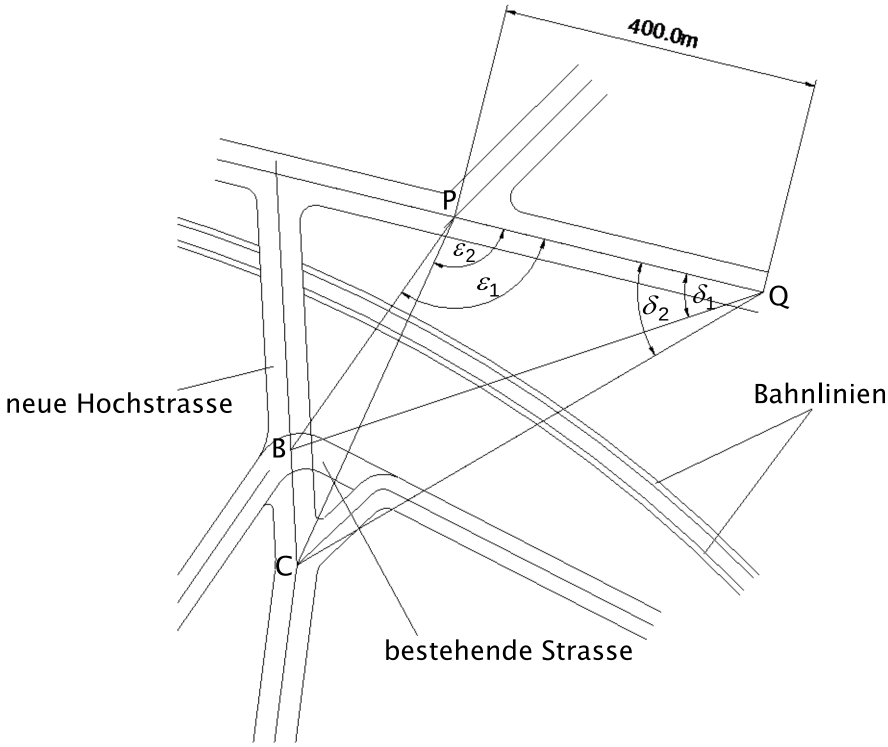
Punkte

Name:	Vorname:

6 Bei Projektarbeiten für eine neue Hochstrasse müssen die Entfernungen $\overline{PB}, \overline{PC}$, $\overline{BC}$ ermittelt werden. Ausgehend von der Referenzstrecke $\overline{PQ} = 400.0\text{m}$ wurden folgende 4 Winkel gemessen: $\delta_1 = 33.5°$, $\delta_2 = 46.3°$, $\varepsilon_1 = 114.0°$, $\varepsilon_2 = 109.2°$

Berechnen Sie auf dm gerundet die Distanzen $\overline{PB}, \overline{PC}, \overline{BC}$! [4]

Bemerkung: Die Punkte P, Q, B, C liegen alle auf derselben Höhe.

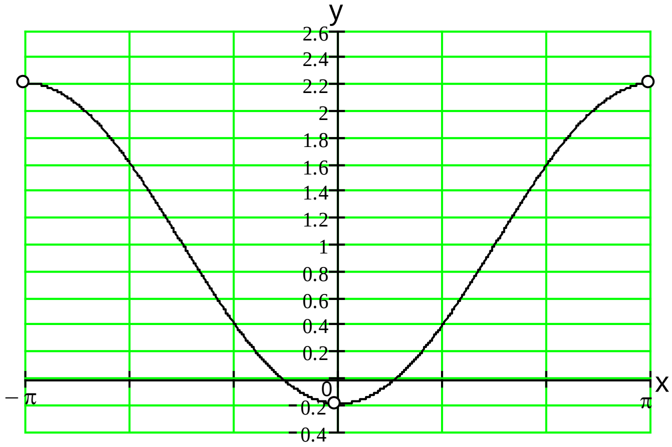


Punkte

Name:	Vorname:

7 Unabhängige Aufgaben:

a) Bestimmen Sie die trigonometrische Funktionsgleichung für den Graphen: [3]



b) Bestimmen Sie die Definitions- und die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} = \tan(x) \quad \text{mit} \quad x \in [0;2\pi[$$ [6]

Punkte

Name: Vorname:

8 In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Geradenschar $G: \vec{r}_a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a+2 \end{pmatrix}$

gegeben.

Die Punkte A (10|0|0), B (0|5|0) und C (0|0|5) bestimmen eine Ebene, die mit E bezeichnet wird.

a) Zeigen Sie, dass E durch die Koordinatengleichung $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 = 0$ beschrieben wird. [2]

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen G und E für $a = -1$. [2]

c) Zeigen Sie, dass die Gerade G für $a = -2$ in der Ebene E liegt und parallel zur Geraden AB ist. [3]

d) Der Punkt C wird an der Geraden AB gespiegelt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes C^*. Hinweis: die Koordinaten sind ganzzahlig. [3]

Punkte

Name: Vorname:

9 Unabhängige Aufgaben

a) Für welchen ganzzahligen a-Wert spannen die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{w} = \begin{pmatrix} a-1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Parallelogramm mit Flächeninhalt $A = 3$ auf? [3]

b) Geben Sie eine Koordinatengleichung derjenigen Ebene an, die senkrecht zur Ebene $2x - y + z = 5$ verläuft und die y-Achse enthält. [2]

c) Der Punkt A(3 | −2 | 5) wird senkrecht auf die Ebene $E: x + 2y - z = 6$ projiziert. Wie lauten die Koordinaten des Bildpunktes A'? [3]

Punkte