Technische Berufsmaturität

Maturitätsprüfung 2008 Grundlagenfach Mathematik

Klassen BMT4a, BMT4b

Name:	Vorname:

Zeit: 240 Minuten

Punkte	Note

- Die Prüfung umfasst die Aufgaben 1 – 9.
- Die Punktzahlen stehen in eckigen Klammern.
- Die Note 6 wird für 52 Punkte erteilt.
- Die Lösungen sind sauber darzustellen und vollständig zu dokumentieren.
- Alle Resultate müssen, falls möglich, exakt angegeben werden!
- Sämtliche Applikationen des Taschenrechners dürfen nur zur eigenen Kontrolle eingesetzt werden.
- Hilfsmittel: Formelsammlung ohne Beispiele; Rechner mit Handbuch, Schablonen.
- Der Austausch der Hilfsmittel ist nicht erlaubt!
- Alle sonstigen elektr. Geräte (MP3-Player, Natel usw.) sind ausgeschaltet und vom Arbeitsplatz entfernt.

Kontrollieren Sie am Schluss der Prüfung, ob sämtliche Lösungsblätter mit der Aufgabenstellung zusammengeheftet sind. Besten Dank!

Viel Erfolg!

1. Welcher Punkt S auf der Geraden $y = f(x) = -0.5x + 5$ hat die kleinste Entfernung vom Punkt $P(2|8)$? Die Aufgabe ist rechnerisch zu lösen. [3]

2. Berechnen Sie die Parameter der Funktion $y = f(x) = ax^3 + bx + c$ deren Graph durch die Punkte $(-3|-30), (0|0), (1|-6)$ verläuft, durch Aufstellen und lösen eines Gleichungssystems. [3]

3. Berechnen Sie die Lösungsmenge: $\dfrac{x+4}{|x-5|} > 2\,, \quad x \in R$ [4]

   Bem.: Die Lösung ist ganzzahlig.

4. Lösen Sie jeweils die Gleichung

   a) $a \cdot e^{0.1x} = b$ für gegebene $a, b > 0$. [2]

   b) $\dfrac{1}{\ln(x)} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\ln(x)}{2}$ [4]

5. Ein kochendheisses Getränk von $100°C$ kühlt bei einer Zimmertemperatur von $20°C$ in 10 Minuten auf $30°C$ ab. Für den zeitlichen Temperaturverlauf gilt

   $\vartheta(t) = \vartheta_u + (\vartheta_0 - \vartheta_u) \cdot e^{-\lambda t}$

   ϑ_0 = Anfangstemperatur

   ϑ_u = Umgebungstemperatur

   a) Berechnen Sie den Parameter λ! [3]

   b) Ein Milchkaffee mit genau gleichviel Kaffee und kalter Milch aus dem Kühlschrank ($4°C$) wird nun auf zwei Arten getrunken:

   1. Art: Die kalte Milch wird sofort zum kochend heissen Kaffee ($100°C$) gemischt und nach 5 Minuten getrunken.

   2. Art: Die kalte Milch von $4°C$ wird erst nach 5 Minuten zum bereits etwas abgekühlten Kaffee gemischt und sofort getrunken.

   Berechnen Sie in beiden Fällen die Temperaturen beim Trinken. [5]

   Bem.: Mischt man zwei gleichgrosse Flüssigkeiten mit dem Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2, so hat das Gemisch die Temperatur: $\vartheta = \dfrac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$

6. Unabhängige Aufgaben

a) Vereinfachen Sie den Ausdruck so stark wie möglich: $\frac{1}{\sin(2x)} - \cot(2x)$ [3]

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung im Intervall $x \in [0°;360°[$:

$2 - 2\cos^2(x) = 3\sin(2x)$ [5]

7. Unabhängige Aufgaben

a) Für welchen a - Wert spannen die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} a-1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein

Parallelogramm mit Flächeninhalt $A = 3$ auf? [3]

b) Gegeben sind die zwei Punkte $A(2|3|4)$ und $B(3|1|3)$ und die Gerade $G: \vec{r} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P auf G, für welchen das Dreieck ΔABP im Punkt B rechtwinklig wird. [3]

c) Stellen Sie sich die Gerade durch die Punkte $A(6|4|5)$ und $B(3|0|4)$ als lineare Flugroute eines Passagierflugzeugs vor, sowie einen Sportflieger, der entlang einer weiteren Geraden durch $P(0|-7|0)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fliegt.

Weisen Sie nach, dass sich die Flugbahnen schneiden, indem Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Flugbahnen berechnen.
Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Flugbahnen?
Bem.: Schnittpunkt hat ganzzahlige Koordinaten. [4]

d) Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle $P(14|7|-11)$ aus, wird in $R(5|1|4)$ an einer Ebene E so reflektiert, dass er anschliessend durch den Punkt $Q(3|13|2)$ geht. Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E? [4]

8. Eine Stadtbibliothek will ihren Bestand an Mathematik- und Physikbüchern erweitern. Es sollen mindestens 50 Mathematikbücher und mindestens 80 Physikbücher, insgesamt aber mindestens 200 Bücher angeschafft werden.
Für die Anschaffung stehen maximal $9'000$ CHF zur Verfügung. Durchschnittlich kosten Mathematikbücher 32 CHF und Physikbücher 40 CHF. Die Wertminderung bei einem Mathematikbuch beträgt 5 CHF, bei einem Physikbuch 6 CHF pro Jahr. Wie viele Bücher jeder Sorte müssen für eine minimale jährliche Wertminderung angeschafft werden und wie gross ist sie?
Verlangte Arbeiten auf dem Weg zur Lösung:
– Definieren Sie die Variablen.
– Bestimmen Sie die Bedingungen und die Zielfunktion für das Planungspolygon.
– Zeichnen Sie ein möglichst grosses Planungspolygon.
– Zeichnen Sie die Zielfunktion ein und markieren Sie die Lösung. [7]

9. Der skizzierte allradgelenkte Flugzeug-Schlepper kann die Vorderräder maximal um $\pm 60°$ und die Hinterräder maximal um $\pm 30°$ lenken. Die untere Figur zeigt den Schlepper mit maximalen Radauslenkungen, welche die kleinsten Wenderadien ergeben. Die Radaufhängungen bilden ein Rechteck $ABCD$.
Bekannt: $\overline{ED} = 289cm$ und die in die Figur eingetragenen Grössen.
Berechnen Sie auf den cm genau:
a) zuerst R_1 [2]
b) dann R_2 [3]