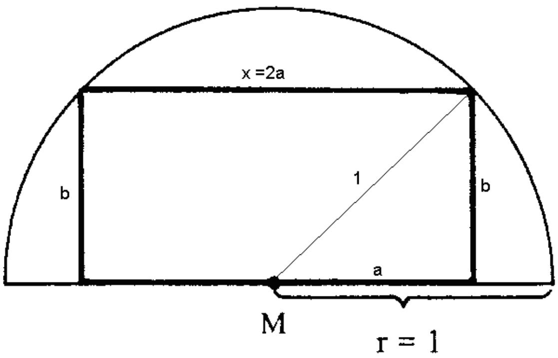
Lösungen

Aufgabe 1 **[2 Punkte]**

Es sei ein Rechteck mit Umfang 4 in einem Halbkreis einbeschrieben.



Berechnen Sie die Seitenlängen des Rechtecks unter der Annahme, dass der Flächeninhalt nicht null sein darf.

Lösung:

1.Gleichung Pythagoras: $a^2 + b^2 = 1$ **½ P.**

2.Halber Umfang: $2a + b = 2$ **½ P.**

Lösung mit solve: $\underline{\underline{a = \frac{3}{5},\ b = \frac{4}{5}}}$ je **½ P.**

Aufgabe 2 **[4 Punkte]**

Ein Computer-Virus wird gleichzeitig von 20 Rechnern aus um 11.27 Uhr gestartet. Um 11.30 Uhr sind bereits 100'000 Internetbenutzer betroffen. Die Verbreitung entspricht dabei einem exponentiellen Wachstum.

a) Wieviele Computer werden theoretisch um 11.37 befallen sein? *[2Punkte]*

b) Um welche Zeit (Std./Min./Sek.) werden über 1 Million infizierte Geräte gezählt? *[1 Punkt]*

c) In welcher Zeitspanne verdoppelt sich die Anzahl befallener Rechner? *[1 Punkt]*

Lösung: $A(t) = A_0 \cdot a^t$ A : Anzahl infizierter Rechner; t : Zeit in Minuten

$A_0 = 20;$ $A(3) = 100'000 = 20 \cdot a^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{5000} \approx 17.1$ **1 P.**

a) $A(10) = 20 \cdot a^{10} \underline{\underline{\approx 4.27 \cdot 10^{13}}}$

b) $10^6 \leq 20 \cdot a^x \rightarrow x = 3.81$ **1 P.** n. = 3 Minuten 48.6 Sekunden

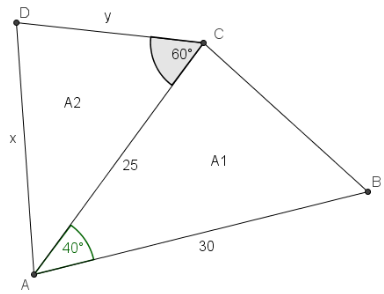
Zeitpunkt: $\underline{\underline{\text{11 Uhr 30Minuten 48.6 Sekunden}}}$ **½ P.**

c) $2 = a^t \rightarrow t = 0.2$ Min. = $\underline{\underline{\text{14.648 Sekun}}}$ **½ P.** **1 P.**

Lösungen

Aufgabe 3 **[4 Punkte]**

Es sei folgender Plan einer Grundstücksfläche ABCD gegeben.
Berechnen Sie aus den Angaben $\overline{AB} = 30m$, $\overline{AC} = 25m$ *und < BAC = 40°, <DCA = 60° und* $A_{ABCD} = 420m^2$ *die Länge der Strecke AD.*



Lösung:

Flächensatz: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 25 \cdot \sin(40°) = 241 m^2$ **1 P.**

$A_2 = A_{tot} - A_1 = 420 m^2 - 241 m^2 = 178.95 m^2$ **½ P.**

Flächensatz: $A_2 = 178.95 m^2 = \frac{1}{2} \cdot y \cdot 25 \cdot \sin(60°)$ $\rightarrow$ y = 16.53 m **1 P.**

Kosinussatz: $x^2 = 25^2 + y^2 - 2 \cdot 25 \cdot y \cdot \cos(60°)$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{x = 22\ m}}$ **1 ½ P.**

Lösungen

Aufgabe 4 **[5 Punkte]**

Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit A(–2/3/1) und B(6/7/1) misst die Höhe $h_c = 6\sqrt{5}$ und der Punkt C liegt in der xy-Ebene.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke AB. [1 Punkt]

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ und der x-Achse. [1 Punkt]

c) Welche Koordinaten hat der Punkt C? Geben Sie alle Lösungen auf eine Nachkommastelle gerundet an. [3 Punkte]

Lösung:

a) Mittelpunkt: $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2} / \frac{y_A + y_B}{2} / \frac{z_A + z_B}{2} \right) = \underline{\underline{(2/5/1)}}$ **1 P.**

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **½ P.** x-Achse, z.B. $\overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{e_x}$ mit Hilfe des Skalarproduktes:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \odot \overrightarrow{e_x}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{e_x}\right|} \right) \qquad \underline{\underline{\alpha = 26.57^\circ}}$$ **½ P.**

c) Ansatz: C(x/y/0) $\rightarrow \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \\ -1 \end{pmatrix}$ **½ P.**

$\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{AB} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{MC} \odot \overrightarrow{AB} = 0$

$h_c = \left|\overrightarrow{MC}\right| = 6 \cdot \sqrt{5}$

$8(x-2) + 4(y-5) = 0$ **½ P.**

$(x-2)^2 + (y-5)^2 + 1 = 36 \cdot 5$ **½ P.**

solve: $\rightarrow x_1 = 7.983;\ x_2 = -3.98;\ y_1 = -6.966;\ y_2 = 16.96$

$\underline{\underline{C_1(8.0 / -7.0 / 0);}}$ **½ P.** $\underline{\underline{C_2(-4.0 / 17.0 / 0)}}$ **½ P.**

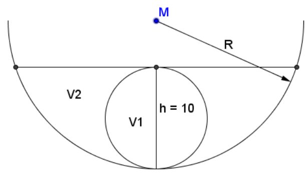
Korrektes Runden **½ P.**

Lösungen

Aufgabe 5 **[4 Punkte]**

In ein halbkugelförmiges Gefäss wird eine Stahlkugel von 5cm Radius gelegt. Anschliessend werden 3l Wasser in das Gefäss gegossen. Wie gross muss der Radius der Halbkugel sein, damit die Kugel gerade vollständig in das Wasser eintaucht?
Fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung:



Skizze: 1 P.

Stahlkugel: $V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 523.6\,\text{cm}^3$ **½ P.**

Kugelsegment: $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2(3R - h)$ **1 P.** wobei h = 2r = 10 cm ist

Volumen Wasser = $V_2 - V_1$ = 3 l = 3‘000 cm^3

Gleichung: $3000 = \frac{\pi}{3}\left(4r^2\left(3R - 2r\right) - 4r^3\right)$ **1 P.** $\rightarrow$(solve) $\underline{\underline{R = 14.55\text{ cm}}}$ ½ **P.**

Lösungen

Aufgabe 6 **[6 Punkte]**

Es sei die Parabel

$$p(x) = 2x^2 - 4x + 10$$

gegeben.

a) Geben Sie die Parabel in der Scheitelpunktform an. *[1.5 Punkte]*
b) Skizzieren Sie die Parabel. (nächste Seite) *[1 Punkt]*
c) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, so dass eine Umkehrfunktion existiert. *[1 Punkt]*
d) Wie lautet die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion? *[1.5 Punkte]*
e) Skizzieren Sie den Graphen der Umkehrfunktion. (In das gleiche Koordinatensystem wie b)) *[1 Punkt]*

Lösung:

b)
e) nächste Seite

a) $y = 2x^2 - 4x + 10 = 2\left(x^2 - 2x + 5\right) = 2\left(\left(x-1\right)^2 + 4\right) = \underline{\underline{2\left(x-1\right)^2 + 8}}$ **1 P.**

$\rightarrow$ S(1/8) **½ P.** (ohne explizite Angabe des Scheitelpunktes trotzdem 1.5 P)

c) Damit eine Umkehrfunktion existiert, muss der Definitionsbereich auf einen der beiden Parabeläste eingeschränkt werden, üblicherweise den rechten.

$\underline{\underline{D = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\right\}}}$ **1 P.**

d) Funktionsgleichung nach x auflösen, ausgehend von der Scheitelpunktform:

$$y = 2\left(x-1\right)^2 + 8$$

$$\frac{y-8}{2} = \left(x-1\right)^2$$ **1 P.**

$$\sqrt{\frac{y-8}{2}} + 1 = x$$

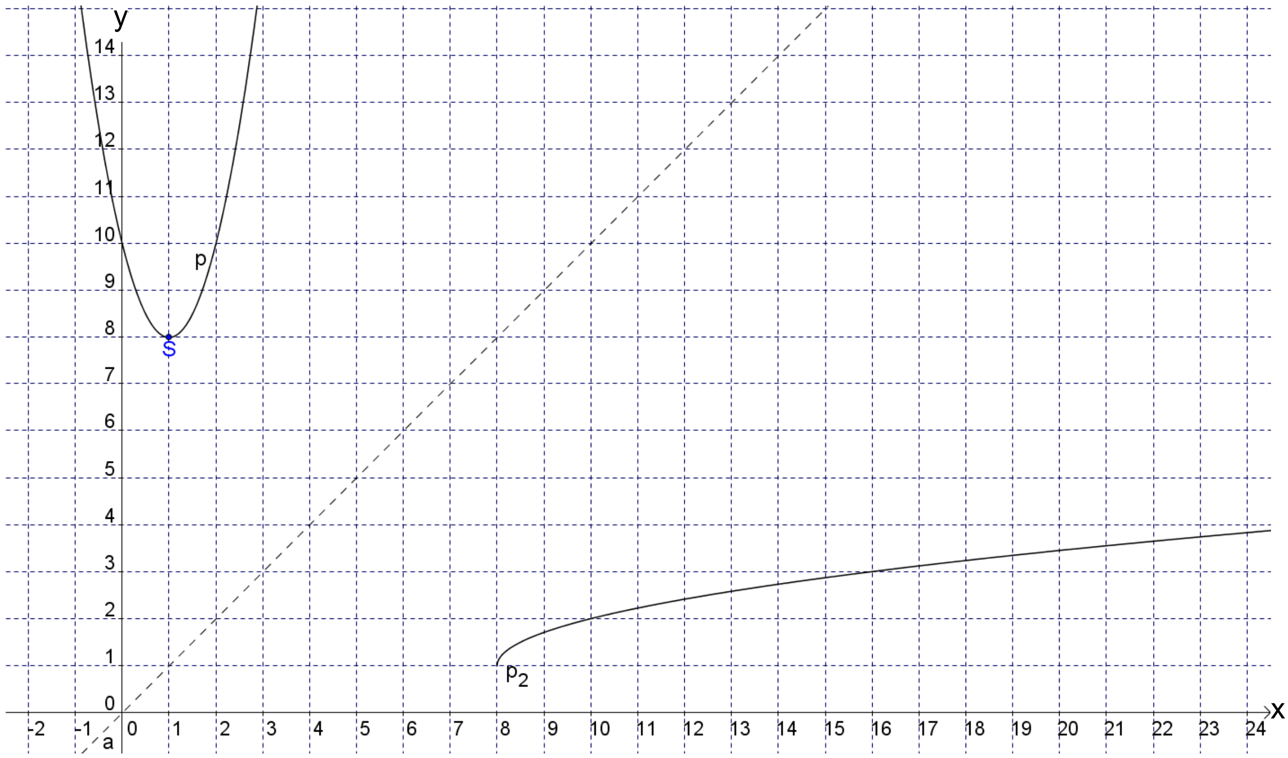
x und y vertauschen: $\underline{\underline{y = \sqrt{\frac{x-8}{2}} + 1}}$ **½ P.**

Lösungen

b) Scheitelpunkt (1/8) und Achsenschnittpunkt (0/10) müssen korrekt eingezeichnet sein **1 P.**

e) (8/1) muss korrekt eingezeichnet sein, Form entsprechend **1 P.**

Für nicht beschriftetes Koordinatensystem **½ P. Abzug**



Lösungen

Aufgabe 7 **[5 Punkte]**

Es seien die Hyperbel mit der Funktionsgleichung

$$y = \frac{4}{x-4} + 2$$

und der Punkt P(5/2) gegeben.
Bestimmen Sie den Punkt Q auf der Hyperbel so, dass sein Abstand zu P möglichst klein wird.
Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

Lösung:

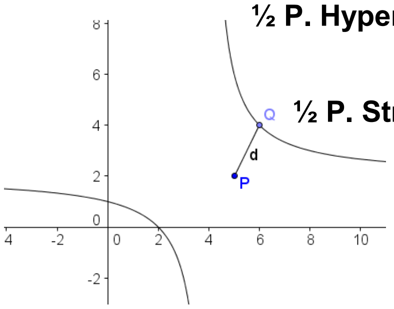
Ansatz: Q(x/y)

$d = |PQ| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2}$ **1 P.**

da Q ein Punkt des Graphen ist, kann für

$y = \frac{4}{x-4} + 2$ eingesetzt werden:

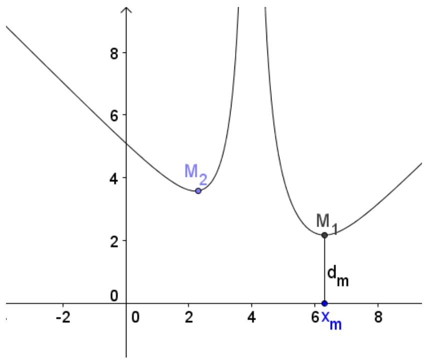
$d = \sqrt{(x-5)^2 + \left(\frac{4}{x-4}\right)^2}$ **2 P.**



½ P. Hyperbel

½ P. Strecke PQ

Wenn d minimal ist, ist auch d^2 minimal.
Mit Hilfe der Graphen von y = d(x) oder y = d^2(x), gezeichnet mit einem grafikfähigen Taschenrechner, wir das Minimum für d abgelesen:



Jeder Ast enthält ein Minimum, was den minimalen Abständen von P zu den beiden Ästen der Hyperbel entspricht. Das absolute Minimum ist M_1, was dem minimalen Wert x = 6.3 entspricht. Diesen Wert in die Hyperbelgleichung eingesetzt:

$y = \frac{4}{x-4} + 2 = \frac{4}{6.3-4} + 2 = 3.7$ **½ P.**

Somit hat Q die Koordinaten: Q(6.3/3.7) **½ P.**