Mathematik Teil 1

Bestimmungen:

- Prüfungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: keine
- Der Lösungsweg muss bei jeder Aufgabe eindeutig ersichtlich sein. Skizzen und Berechnungen (Berechnungsterme, algebraische Ausdrücke) gehören auf das abzugebende Blatt.
- Falsche Lösungsansätze und ungültige Ergebnisse sind deutlich durchzustreichen.
- Für die Note 6 sind 18 Punkte von 22 Punkten notwendig.

---

1. Vereinfachen Sie soweit wie möglich: (4Pt.)

a) $\dfrac{y^{3n+1}-2y^{3n}+y^{3n-1}}{y^{2n+1}-y^{2n-1}}$

b) $\sqrt{a^{-2}\cdot\sqrt[3]{b\cdot\sqrt{a^{-3}b^{-2}}}}$

c) $\lg\left(\dfrac{1}{x}\right)-\lg\left(\dfrac{2}{x}\right)$

d) $\dfrac{1}{2}\log_9(7)+\dfrac{1}{2}\log_9\left(7^{-1}\right)+\dfrac{1}{4}\log_9(81)$

2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Terme und die Lösungsmengen für x

a) $\dfrac{3}{x+4}<\dfrac{2}{x-3}$ (2 Pt.)

b) $x^2-2x-15\leq 0$ (2 Pt.)

3. Bestimmen Sie von der rationalen Funktion $y=\dfrac{4x^2-10x+9}{x-2}$ (2 Pt.)

a) die Asymptoten
b) den Schnittpunkt der Asymptoten

4. Stellen Sie $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. (2 Pt.)

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\10\\-3\end{pmatrix}\qquad\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\qquad\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\qquad\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

5. Gegeben sei die Parabel p: $y = -x^2 + \lambda(x+1)$
   a) Für welche Parameter λ besitzt die Parabel keine Schnittpunkte mit der x-Achse? (1 Pt.)

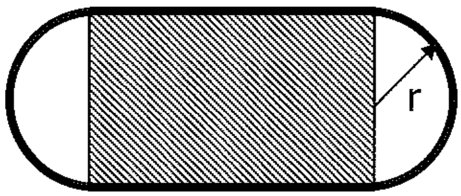
   b) Setzen Sie für λ den Wert -3 ein und bestimmen Sie den Scheitelpunkt S. (1 Pt.)

6. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf:

   a) $$\frac{\lg\left(\frac{(4+x)\cdot x}{2x-2}\right)}{\lg\left(\frac{x+4}{x+3}\right)+\lg\left(\frac{(x+3)\cdot(2x-2)}{x}\right)}=1$$ (2 Pt.)

   b) $e^{2x} = 3 - 2e^x$ (2 Pt.)

7. Eine ovalförmige Rennbahn von 400m Länge wird geplant, so dass das rechteckförmige Stück für weitere Sportanlagen genutzt werden kann und deshalb einen maximalen Flächeninhalt aufweisen soll. Wie gross muss der Radius der Halbkreise gewählt werden. Berechnen Sie das Resultat in Metern.



   Setzen Sie für die Zahl π der Einfachheit halber den Wert $3\frac{1}{8}$ ein. (2 Pt.)

8. Der gut trainierte Pirmin und sein jüngerer Bruder Balz trainieren mit ihren Fahrrädern auf einer Rundstrecke von genau 6 km Länge. Starten sie beide in der gleichen Richtung, so wird Balz nach 20 Minuten überrundet, starten sie hingegen in entgegen gesetzten Richtungen, kreuzen sie sich bereits nach 6 Minuten und 40 Sekunden. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Pirmin in km/h, unter der Voraussetzung, dass die Brüder mit konstanten Geschwindigkeiten unterwegs sind. (2 Pt.)

Mathematik Teil 1 (Lösungen)

Bestimmungen:

- Prüfungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: keine
- Der Lösungsweg muss bei jeder Aufgabe eindeutig ersichtlich sein. Skizzen und Berechnungen (Berechnungsterme, algebraische Ausdrücke) gehören auf das abzugebende Blatt.
- Falsche Lösungsansätze und ungültige Ergebnisse sind deutlich durchzustreichen.
- Für die Note 6 sind 18 Punkte von 22 Punkten notwendig.

---

1. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $\frac{y^{3n+1}-2y^{3n}+y^{3n-1}}{y^{2n+1}-y^{2n-1}}=y^n\cdot\frac{y-1}{y+1}$ (1Pt.)

b) $\sqrt{a^{-2}\cdot\sqrt[3]{b\cdot\sqrt{a^{-3}b^{-2}}}}=a^{-\frac{5}{4}}$ (1Pt.)

c) $\lg\left(\frac{1}{x}\right)-\lg\left(\frac{2}{x}\right)=\lg\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}}\right)=\lg(0{,}5)$ (1Pt.)

d) $\frac{1}{2}\log_9(7)+\frac{1}{2}\log_9\left(7^{-1}\right)+\frac{1}{4}\log_9(81)=\frac{1}{2}\left(\log_9(7)+\log_9\left(7^{-1}\right)\right)+\frac{1}{4}\cdot 2$ (1Pt.)

$=\frac{1}{2}\left(\log_9\left(7\cdot 7^{-1}\right)\right)+0{,}5=0{,}5$

2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Terme und die Lösungsmengen für x

$\frac{3}{x+4}<\frac{2}{x-3}\rightarrow D=R/\{-4,3\}$

a) $0<\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x+4}=\frac{2x+8-3x+9}{HN}=\frac{17-x}{HN}$ (2 Pt.)

$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{x|3<x<17\vee x<-4\}}}$

$x^2-2x-15\le 0$

b) $(x+3)(x-5)\le 0\rightarrow D=R\rightarrow(x+3)(x-5)=0\Rightarrow x_1=-3\wedge x_2=5\Rightarrow$ (1 Pt.)

$L=\{x|-3\le x\le 5\}$

3. Bestimmen Sie von der rationalen Funktion
   a) die Asymptoten (1 Pt.)
   b) den Schnittpunkt der Asymptoten (1 Pt.)

$y=\frac{4x^2-10x+9}{x-2}=4x-2+\frac{5}{x-2} \rightarrow y_1$: Parallele zur y - Achse durch x = 2 und

$y_2=4x-2$

$S: y_2=4x-2$ für $x=2 \Rightarrow S(2/6)$

4. Stellen Sie $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. (2 Pt.)

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\10\\-3\end{pmatrix} \quad \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l}1=x+z\\10=2x+2y\\-3=-2y-3z\end{array}\right| \rightarrow x=1-z \wedge x=5-y \Rightarrow 1-z=5-y \rightarrow z=y-4 \Rightarrow -3=-2y-3(y-4) \rightarrow y=3$$

$x=2; z=-1 \rightarrow \vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

5. Gegeben sei die Parabel p: $y=-x^2+\lambda(x+1)$
   a) Für welche Parameter λ besitzt die Parabel keine Schnittpunkte mit der x-Achse? (1 Pt.)

$y=-x^2+\lambda x+\lambda \rightarrow$ keine Schnittpunkte $\Rightarrow D \leq 0 \rightarrow b^2-4ac=\lambda^2-4\cdot(-1)\cdot\lambda \leq 0$

$\lambda^2+4\lambda \leq 0 \rightarrow \lambda^2+4\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \wedge \lambda_2=-4 \Rightarrow -4 \leq \lambda \leq 0$

   b) Setzen Sie für λ den Wert -3 ein und bestimmen Sie den Scheitelpunkt S. (1 Pt.)

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{-2}=-1.5 \rightarrow y_s=-\left(-\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-3=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-3=\frac{-9+18-12}{4}=-\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{S(-1{,}5/-0.75)}}$

6. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf:

$$\frac{\lg\left(\frac{(4+x)\cdot x}{2x-2}\right)}{\lg\left(\frac{x+4}{x+3}\right)+\lg\left(\frac{(x+3)\cdot(2x-2)}{x}\right)}=1$$

$$\lg(x+4)+\lg(x)-\lg(2x-2)=\lg(x+4)-\lg(x+3)+\lg(x+3)+\lg(2x-2)-\lg(x)$$

$$2\lg(x)-2\lg(2x-2)=0$$

a) $\lg\left(\frac{x}{2x-2}\right)=0$ |exponieren zur Basis 10 — 2 Pt.

$$\frac{x}{2x-2}=1$$

$$x=2x-2$$

$$x=2\Rightarrow \underline{\underline{L=\{2\}}}$$

$$e^{2x}=3-2e^{x}$$

Substitution: $e^{x}=y\Rightarrow$

$$y^2=3-2y$$

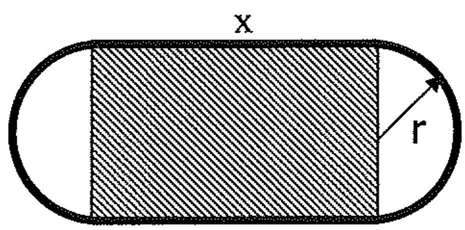
b) $y^2+2y-3=0=(y-1)(y+2)=0\Rightarrow y_1=1\wedge y_2=-2$ — 2 Pt.

$e^{x}=1$ |ln

$$x=\ln(1)$$

$e^{x}=-2$ (keine Lösung) $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{\ln(1)\}}}=\underline{\underline{\{0\}}}$

7. Eine ovalförmige Rennbahn von 400m Länge wird geplant, so dass das rechteckförmige Stück für weitere Sportanlagen genutzt werden kann und deshalb einen maximalen Flächeninhalt aufweisen soll. Wie gross muss der Radius der Halbkreise gewählt werden. Berechnen Sie das Resultat in Metern und setzen Sie für die Zahl π der Einfachheit halber den Wert $3\frac{1}{8}$ ein. (2 Pt.)



$$l=400=2x+2r\pi\rightarrow x=\frac{400-2r\pi}{2}=200-r\pi$$

$$A=y=2rx=2r\cdot(200-r\pi)=-2r^2\pi+400r$$

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{400}{-4\pi}=\frac{100}{\pi}=\frac{100}{\frac{25}{8}}=\underline{\underline{32m}}$$

8. Der gut trainierte Pirmin und sein jüngerer Bruder Balz trainieren mit ihren Fahrrädern auf einer Rundstrecke von genau 6 km Länge. Starten sie beide in der gleichen Richtung, so wird Balz nach 20 Minuten überrundet, starten sie hingegen in entgegen gesetzten Richtungen, kreuzen sie sich bereits nach 6 Minuten und 40 Sekunden. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Pirmin in km/h, unter der Voraussetzung, dass die Brüder mit konstanten Geschwindigkeiten unterwegs sind. (2 Pt.)

$x : v$ von Pirmin

$y : v$ von Balz

$s = vt \rightarrow$

$6'000m = 20 \cdot 60'' \cdot x - 20 \cdot 60'' \cdot y$

$6'000m = (6 \cdot 60 + 40)'' \cdot x + (6 \cdot 60 + 40)'' \cdot y \rightarrow$

$1'200x - 1'200y = 6'000 \rightarrow x = \frac{6'000 + 1'200y}{1'200} = 5 + y$

$400x + 400y = 6'000 \rightarrow$

$400(5 + y) + 400y = 6'000$

$2000 + 400y + 400y = 6'000$

$800y = 4'000$

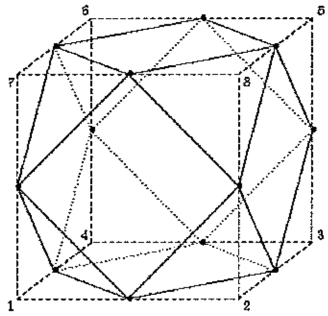
$y = 5 \rightarrow x = 5 + 5 = 10m/s \equiv 36km/h$

Mathematik Teil 2

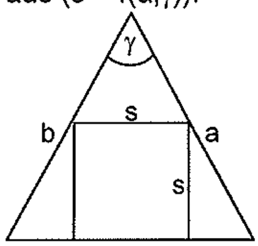
Bestimmungen:
- Prüfungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung / TR TI-89
- Der Lösungsweg muss bei jeder Aufgabe eindeutig ersichtlich sein. Skizzen und Berechnungen (Berechnungsterme, algebraische Ausdrücke) gehören auf das abzugebende Blatt.
- Falsche Lösungsansätze und ungültige Ergebnisse sind deutlich durchzustreichen.
- Für die Note 6 sind 26 Punkte von 31 Punkten notwendig.

1. Lösen Sie folgende Gleichungen **von Hand** nach x auf für $0° \le x \le 360°$. Machen Sie die Proben und schreiben Sie die Lösungsmengen auf. Der TR kann als Kontrolle eingesetzt werden.
   a) $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x)$ (1 Pt.)
   b) $\sin(x) = 1 + \cos(x)$ (2Pt.)

2. Wenn man in einem Würfel mit Kantenlänge s alle Seitenmitten miteinander verbindet, erhält man einen sogenannten Kuboktaeder.
   Drücken Sie
   a) das Volumen des Kuboktaeders mit s aus (V_K=f(s)), (1 Pt.)
   b) die Oberfläche des Kuboktaeders mit s aus (0_K=f(s)) (1 Pt.)
   c) das Verhältnis $V_{Kuboktaeder} : V_{Würfel}$ in % aus. (1 Pt.)

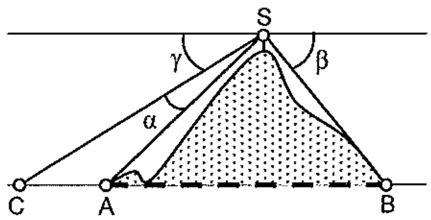


3. Einem gleichschenkligen Dreieck mit a = b = 30 cm soll ein Quadrat einbeschrieben werden.
   a) Drücken Sie die Quadratseite s als Funktion des Winkels γ und der Seite a aus (s = f(a,γ)). (2 Pt.)
   b) Für welchen Winkel γ wird das Quadrat, bzw. s maximal? Bestimmen Sie γ_{Max} mit Hilfe des Rechners. (1Pt.)
   ⇨ Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen können, bestimmen Sie auf dem TR y_{Max} für folgende Funktion:
   $$y = \frac{10 \cdot \cos(x)}{1 + \frac{1}{\tan(x)}}$$
   c) Ist das Resultat von Aufgabe b) von der Seitenlänge a abhängig. Begründen Sie kurz. (1 Pt.)

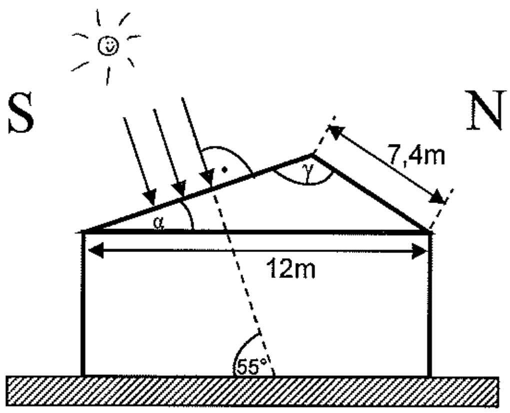


4. Gegeben sind die folgenden Raumkoordinaten $A(1/2/-2); B(1/1/1); C(3/0/-4); D(2/-3/z)$ im rechtwinkligen Koordinatensystem mit $e_x = e_y = e_z = 1$ cm.
   a) Berechnen Sie den Umfang des Dreieckes ABC. (2Pt.)
   b) Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes ABC. (2 Pt.)
   c) Berechnen Sie die Koordinate z des Ortsvektors $= \overrightarrow{OD}$, so dass dieser rechtwinklig auf $\overrightarrow{OA}$ steht. (1 Pt.)

5. Vor dem Bau eines horizontal verlaufenden Tunnels soll seine Länge $\overline{AB}$ bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird im Tal eine ebenfalls horizontale Standlinie $\overline{AC}$ = 352.71m abgesteckt, die mit der Bergspitze S sowie dem Tunneleingang B in einer Vertikalebene liegt. In S werden folgende Winkel gemessen: α = 26°30'; β = 40°25' und γ = 32°20'.Bestimmen Sie die Strecke $\overline{AB}$. (2 Pt.)

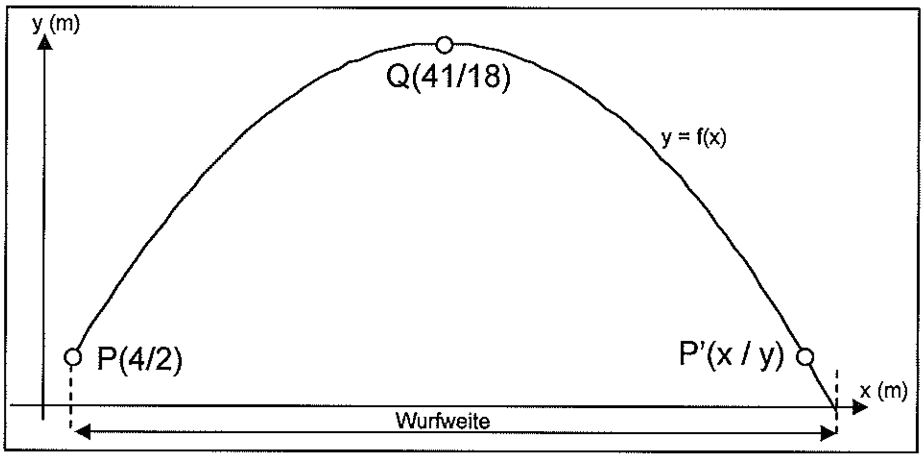


6. Eine mit der Längsseite nach Süden ausgerichtete Dachfläche soll mit Solarzellen so bestückt werden, dass die Sonnenstrahlen dann rechtwinklig auf die Dachfläche auftreffen, wenn die Sonnenstrahlen einen Winkel von 55° gegenüber der Horizontalen bilden. Die gegen Norden gerichtete Dachbreite ist gegeben und beträgt 7.4m. Im Grundriss beträgt die gesamte Dachbreite 12m.
   a) Berechnen Sie die Dachneigung α. (1 Pt.)
   b) Berechnen Sie die möglichen Dachwinkel γ. (2 Pt.)
   c) Berechnen Sie die möglichen mit Solarzellen bedeckbaren Flächen auf der Südseite, wenn die Dachlänge in Ost-West-Richtung 15m beträgt. (1 Pt.)



7. Eine Schussvorrichtung für Bälle schiesst einen Ball im Punkt P (4.0m / 2.0m) los. Der Ball erreicht auf der parabelförmigen Flugbahn seine maximale Höhe im Punkt Q (41m / 18m).

   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Flugparabel. Verwenden Sie das in der Aufgabenstellung verwendete Koordinatensystem. (2 Pt.)
   b) Berechnen Sie die Wurfweite auf 1 dm genau. (1 Pt.)



8. Der Zerfallsprozess von radioaktivem Uran 239 erfolgt exponentiell. Am Anfang waren $8.192 \cdot 10^{22}$ radioaktive Atomkerne vorhanden, nach 4 Std. waren es noch $2 \cdot 10^{19}$. Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Hälfte der vorhandenen Atomkerne zerfallen ist (sog. Halbwertszeit). (2 Pt.)

9. Ein Kapital ist auf Zinseszins angelegt. Nach 3 Jahren beträgt es Fr. 2'771.80, nach 5 Jahren Fr. 2'969.20.
   a) Wie gross ist der Zinsfuss? (1 Pt.)
   b) Wie gross ist das Anfangskapital? (1 Pt.)
   c) Wie lange dauert es, bis sich das Kapital verdoppelt hat? (1 Pt.)

10. Ein Motorboot benötigt für eine 72 km lange Strecke auf einem Fluss 54 Minuten. Auf dem Rückweg braucht es 1 Stunde 48 Minuten. Berechnen Sie die Eigengeschwindigkeit des Bootes und die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses! (2 Pt.)

Mathematik Teil 2 (Lösungen)

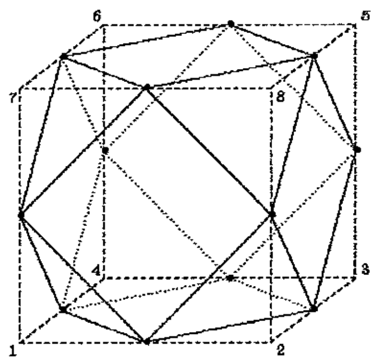
Bestimmungen:
- Prüfungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung / TR TI-89
- Der Lösungsweg muss bei jeder Aufgabe eindeutig ersichtlich sein. Skizzen und Berechnungen (Berechnungsterme, algebraische Ausdrücke) gehören auf das abzugebende Blatt.
- Falsche Lösungsansätze und ungültige Ergebnisse sind deutlich durchzustreichen.
- Für die Note 6 sind 26 Punkte von 31 Punkten notwendig.

1. Lösen Sie Sie folgende Gleichungen **von Hand** nach x auf für $0° \le x \le 360°$. Machen Sie die Proben und schreiben Sie die Lösungsmengen auf. Der TR kann als Kontrolle eingesetzt werden.
   a) $\sin(2x) = 2\cdot\sin(x)$ (1 Pt.)
   b) $\sin(x) = 1+\cos(x)$ (2 Pt.)

a)
$$\begin{aligned}
&\text{Linke seite}: \sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x) \rightarrow \\
&2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x) \\
&\sin(x)\cos(x) = \sin(x) \\
&\sin(x)\cdot(\cos(x)-1) = 0 \\
&\sin(x) = 0 \rightarrow x_{1,2} = 0°;180° \\
&\cos(x) = 1 \rightarrow x_{3,4} = 0°;360° \Rightarrow \underline{\underline{L = \{0°,180°;360°\}}}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-\cos^2(x)} = 1+\cos(x) \qquad |\text{quadrieren} \\
&1-\cos^2(x) = 1+2\cos(x)+\cos^2(x) \\
&0 = 2\cdot(\cos(x)+\cos^2(x)) \\
&0 = \cos(x)\cdot(1+\cos(x)) \\
&\cos(x) = 0 \rightarrow x_{1,2} = 90°;270° \\
&\cos(x) = -1 \rightarrow x_3 = 180° \\
&\text{Proben}: \\
&\sin(90°) = 1 \wedge 1+\cos(90°) = 1 \rightarrow \text{i.O.} \\
&\sin(270°) = -1 \wedge 1+\cos(270°) = 1 \rightarrow \text{falsch} \\
&\sin(180°) = 0 \wedge 1+\cos(180°) = 0 \rightarrow \text{i.O.} \\
&\Rightarrow \underline{\underline{L = \{90°,180°\}}}
\end{aligned}$$

2. Wenn man in einem Würfel mit Kantenlänge s alle Seitenmitten miteinander verbindet, erhält man einen sogenannten Kuboktaeder.
   Drücken Sie
   a) das Volumen des Kuboktaeders mit s aus (V_K=f(s)), (1 Pt.)
   b) die Oberfläche des Kuboktaeders mit s aus (O_K=f(s)) (1 Pt.)
   c) das Verhältnis $V_{Kuboktaeder} : V_{Würfel}$ in % aus. (1 Pt.)



a) $V_{Würfel} - 8$ Pyramiden $\quad V_P : G = \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{2}\cdot\frac{s}{2} = \frac{s^2}{8} \rightarrow V_P = \frac{\frac{s^2}{8}\cdot\frac{s}{2}}{3} = \frac{s^3}{48} \rightarrow 8V_P = \frac{s^3}{6} \Rightarrow$

$$V_K = s^3 - \frac{s^3}{6} = \frac{5s^3}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{6}s^3}}$$

b) O_K = 6 Quadrate + 8 gleichseitige Dreiecke

$$\text{Quadrate}: a = \sqrt{2\cdot\frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2}\cdot\sqrt{2} \rightarrow a^2 = \frac{s^2}{2}\,(\text{klar!})\; 6\cdot\frac{s^2}{2} = 3s^2$$

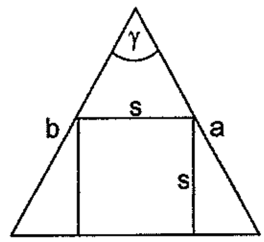
$$\text{Dreiecke}: h^2 = \left(\frac{s}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 = \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{8} = \frac{3s^2}{8} \rightarrow h = \frac{s}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{s}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{s^2}{8}\cdot\sqrt{3} \rightarrow 8\cdot\frac{s^2}{8}\sqrt{3} = s^2\cdot\sqrt{3}$$

$$\rightarrow O = 3s^2 + s^2\cdot\sqrt{3} = \underline{\underline{s^2\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)}}$$

c) $\frac{V_K}{V_W} = \frac{\frac{5}{6}s^3}{s^3} = \underline{\underline{83{,}3\%}}$

3. Einem gleichschenkligen Dreieck mit a = b = 30 cm soll ein Quadrat einbeschrieben werden.
   a) Drücken Sie die Quadratseite s als Funktion des Winkels γ und der Seite a aus ($s = f(a,\gamma)$). (2 Pt.)
   b) Für welchen Winkel γ wird das Quadrat, bzw. s maximal? Bestimmen Sie γ_{Max} mit Hilfe des Rechners. ⇨ Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen können, bestimmen Sie auf dem TR y_{Max} für folgende Funktion: (1 Pt.)
   c) Ist das Resultat von Aufgabe b) von der Seitenlänge a abhängig. Begründen Sie. (1 Pt.)



$$y = \frac{10\cdot\cos(x)}{1+\frac{1}{\tan(x)}}$$

a) $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{h}{a} \wedge h = s + (h-s) \wedge h - s = \frac{\frac{s}{2}}{\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{s}{2\cdot\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\frac{a\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{1+\frac{1}{2\cdot\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}} = s}} \quad \text{oder } \frac{s}{2} = a\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) - s\cdot\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \rightarrow a\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{s}{2} + s\cdot\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow s = \frac{a\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\frac{1}{2}+\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

b) TR: x_{Max} = 76.89° (y = 14.4 cm)

c) Nein, denn es handelt sich stets um ähnliche Dreicke!

4. Gegeben sind die folgenden Raumkoordinaten $A(1/2/-2); B(1/1/1); C(3/0/-4); D(2/-3/z)$ im rechtwinkligen Koordinatensystem mit $e_x := e_y = e_z = 1$ cm.

a) Berechnen Sie den Umfang des Dreieckes ABC. (2 Pt.)
b) Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes ABC. (2 Pt.)
c) Die Koordinate z des Ortsvektors $\overrightarrow{OD}$, falls dieser rechtwinklig zum Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ stehen soll. (1 Pt.)

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1-1\\1-2\\1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3-1\\0-1\\-4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{30}$$

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3-1\\0-2\\-4-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{12}\rightarrow U\approx\underline{\underline{12{,}1\text{cm}}}$$

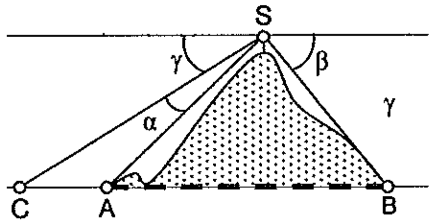
$$A:\alpha:\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{0\cdot2+(-1)\cdot(-2)+3\cdot(-2)}{\sqrt{10\cdot12}}=-0.365148\rightarrow\alpha=\underline{111.41^\circ}$$

$$h:\sin(180^\circ-\alpha)=\sin(\alpha)=\frac{h_c}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\rightarrow h=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin(\alpha)=\sqrt{12}\cdot\sin(68.58)=\underline{3.22\text{cm}}$$

$$A=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot h_c}{2}=\frac{\sqrt{10}\text{cm}\cdot3{,}22\text{cm}}{2}\approx\underline{\underline{5{,}1\text{cm}^2}}$$

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\z\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=0\rightarrow2\cdot1+(-3)\cdot2+z\cdot(-2)=-4+2z=0\rightarrow\underline{\underline{z=-2}}$$

5. Vor dem Bau eines horizontal verlaufenden Tunnels soll seine Länge $\overline{AB}$ bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird im Tal eine ebenfalls horizontale Standlinie $\overline{AC}$ = 352.71m abgesteckt, die mit der Bergspitze S sowie dem Tunneleingang B in einer Vertikalebene liegt. In S werden folgende Winkel gemessen: α=26°30'; β = 40°25' und γ = 32°20'. Bestimmen Sie die Strecke $\overline{AB}$. (2 Pt.)



$$\text{Winkel ASB}=\varepsilon=180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)=80.750^\circ$$

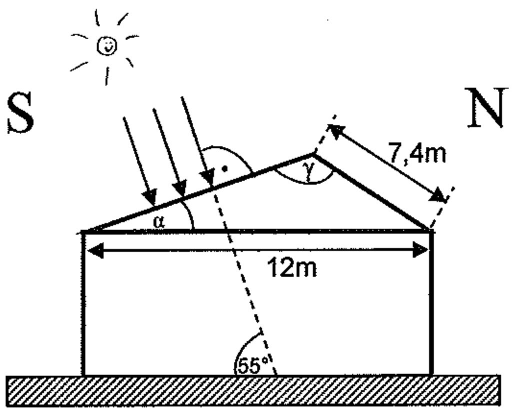
$$\text{Winkel SAB}=\delta=\gamma+\alpha=58{,}833^\circ$$

$$\text{Winkel ABS}=\varphi=180^\circ-/\alpha+\gamma+\varepsilon)=40{,}417^\circ$$

$$\overline{AS}:\ \frac{\sin\alpha}{\overline{AC}}=\frac{\sin\gamma}{\overline{AS}}\rightarrow\overline{AS}=\frac{\overline{AC}\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=422.783\text{m}$$

$$\overline{AB}:\ \frac{\sin\varphi}{\overline{AS}}=\frac{\sin\varepsilon}{x}\rightarrow x=\frac{\sin\varepsilon\cdot\overline{AS}}{\sin\varphi}\approx\underline{\underline{643.62\text{m}}}$$

6. Ein mit der Längsseite nach Süden ausgerichtete Dachfläche soll mit Solarzellen so bestückt werden, dass die Sonnenstrahlen dann rechtwinklig auf die Dachfläche auftreffen, wenn die Sonnenstrahlen einen Winkel von 55° gegenüber der Horizontalen bilden. Die gegen Norden gerichtete Dachbreite ist gegeben und beträgt 7.4m. Im Grundriss beträgt die gesamte Dachbreite 12m.
   a) Berechnen Sie die Dachneigung α. (1 Pt.)
   b) Berechnen Sie die möglichen Dachwinkel γ.(2 Pt.)
   c) Berechnen Sie die möglichen mit Solarzellen bedeckbaren Flächen auf der Südseite, wenn die Dachlänge in Ost-West-Richtung 15m beträgt. (1 Pt.)



a) $\alpha = 180° - (90° + 55°) = \underline{\underline{35°}}$

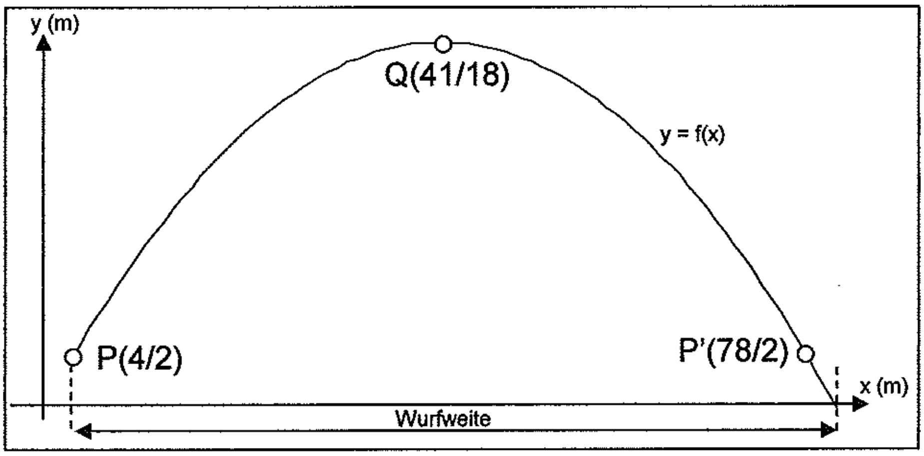
b) $\dfrac{\sin\gamma}{12\text{m}} = \dfrac{\sin\alpha}{7.4\text{m}} \rightarrow \sin\gamma = \dfrac{12\text{m}\cdot\sin\alpha}{7.4\text{m}} \Rightarrow \underline{\underline{68.45° = \gamma_1}} \rightarrow \gamma_2 = 180° - 68.45° = \underline{\underline{111.55°}}$

c)
$b_1 = \sqrt{12^2 + 7.4^2 - 2\cdot 12\cdot 7.4\cdot\cos 76.55°} \approx 12.54\text{m} \rightarrow A_1 = 12.54\text{m}\cdot 15\text{m} = \underline{\underline{188.1\text{m}^2}}$

$b_2 = \sqrt{12^2 + 7.4^2 - 2\cdot 12\cdot 7.4\cdot\cos 33.45°} \approx 7.11\text{m} \rightarrow A_1 = 7.11\text{m}\cdot 15\text{m} = \underline{\underline{106.7\text{m}^2}}$

7. Eine Schussvorrichtung für Bälle schiesst einen Ball im Punkt P (4.0m / 2.0m) los. Der Ball erreicht auf der parabelförmigen Flugbahn seine maximale Höhe im Punkt Q (41m / 18m

   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Flugparabel. Verwenden Sie das in der Aufgabenstellung verwendete Koordinatensystem. (2 Pt.)
   b) Berechnen Sie die Wurfweite auf 1 dm genau. (1 Pt.)



a) Funktionsgleichung

$$\begin{vmatrix} 16a & 4b & c \\ 1681a & 41b & c \\ 6084a & 78b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 18 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \text{TR TI - 89:} \quad \begin{array}{l} [(-0.011687)(0.958364)(-1.64646] \rightarrow \\ \underline{\underline{f(x) = -0.011687x^2 + 0.958364x - 1.64646}} \end{array}$$

b) Wurfweite: $y = 0$: $-0.011687x^2 + 0.958364x - 1.64646 = 0$
TR: $x_1 = 1.76$; $x_2 = \underline{80.24}$

Wurfweite: $80.24\text{m} - 4\text{m} \approx \underline{76.2\text{m}}$

8. Der Zerfallsprozess von radioaktivem Uran 239 erfolgt exponentiell. Am Anfang waren $8.192 \cdot 10^{22}$ radioaktive Atomkerne vorhanden, nach 4 Std. waren es noch $2 \cdot 10^{19}$. Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Hälfte der vorhandenen Atomkerne zerfallen ist (sog. Halbwertszeit). (2 Pt.)

$$a: 2\cdot 10^{19} = 8.192\cdot 10^{22}\cdot a^4 \Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{2\cdot 10^{19}}{8.192\cdot 10^{22}}} = \underline{0.125}$$

$$0.5K_0 = K_0 \cdot 0.125^t \Rightarrow t = \frac{\lg(0.5)}{\lg(0.125)} = \frac{1}{3}h = \underline{\underline{20\text{Minuten}}}$$

9. Ein Kapital ist auf Zinseszins angelegt. Nach 3 Jahren beträgt es Fr. 2'771.80, nach 5 Jahren Fr. 2'969.20
   a) Wie gross ist der Zinsfuss? (1 Pt.)
   b) Wie gross ist das Anfangskapital? (1 Pt.)
   c) Wie lange dauert es, bis sich das Kapital verdoppelt hat? (1 Pt.)

$$2'969.20 = 2'771.8\cdot a^{(5-3)} \rightarrow a = 1.035 \Rightarrow p = \underline{\underline{3.5\%}}$$

$$2771.8 = K_0\cdot 1.035^3 \rightarrow K_0 = \frac{2771.8}{1.035^3} = \underline{\underline{2'500\text{Fr}}}$$

$$2\cdot 2'500 = 2'500\cdot 1.035^t \Rightarrow t = \frac{\lg(2)}{\lg(1{,}035)} = 20.15 \approx \underline{\underline{20\text{ Jahre}}}$$

10. Ein Motorboot benötigt für eine 72 km lange Strecke auf einem Fluss 54 Minuten. Auf dem Rückweg braucht es 1 Stunde 48 Minuten. Berechne die Eigengeschwindigkeit des Bootes und die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses! (2 Pt.)

Gesamtgeschwindigkeiten.

Hinfahrt: 72 km : 0,9 h = 80km/h ; Rückfahrt: 72km : 1.8j = 40 km/h

$v_{Boot} = x$; $v_{Fluss} = y$

$$x + y = 80$$
$$x - y = 40 \rightarrow \underline{\underline{x = 60\text{km/h} \wedge y = 20\text{km/h}}}$$