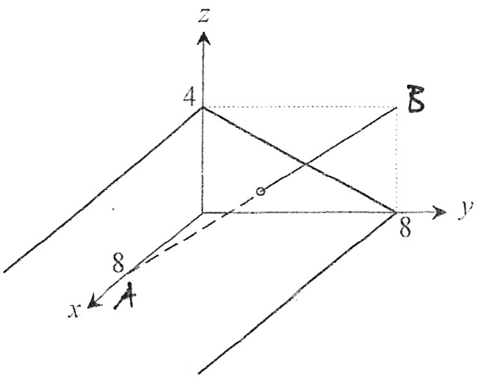
1

a)



$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,5

$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ 0,5

$g: \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$

$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0-8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1P

b)

$\varepsilon: n_2 y + n_3 z = k \quad |:k$

$\frac{n_2 y}{k} + \frac{n_3 z}{k} = 1$

$\frac{y}{8} + \frac{z}{4} = 1 \quad |\cdot 8$

$\varepsilon: \underline{\underline{y + 2z = 8}}$ 2P $\Rightarrow$

---

c) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow 2\lambda + 2\lambda = 8$

$\underline{\lambda = 2}$ 0,5

$\underline{\underline{\vec{r}_S}} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}}$ 0,5

---

d)

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 0,5

$\sin \varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{d}}{n \cdot d} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9}} = \frac{4}{3\sqrt{5}}$

$\varphi = 36,60°$ 0,5

2

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) $g: \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0-7 \\ 3-4 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

1P

---

b) g: Richtungsvektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

h: Richtungsvektor $\vec{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Big\} \; \vec{m} = \vec{f}$

1P

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1P

$$g \parallel h \Rightarrow \vec{d} \neq t \cdot \vec{m} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq t \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

---

c) $\alpha: \vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_A) = 0$

$$\vec{n} = \vec{d} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

1P

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-3 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0$$

$\alpha: \; 2x + y - 3 - 3z = 0$

$$\underline{\underline{2x + y - 3z = 3}}$$

1P

3a)

$$T : t \mapsto T_u + \Delta T e^{-kt}$$

a) $$T = T_u + \Delta T e^{-kt}$$

$$\frac{T - T_u}{\Delta T} = e^{-kt} \Rightarrow e^{kt} = \frac{\Delta T}{T - T_u}$$

$$k \cdot t = \ln\left(\frac{\Delta T}{T - T_u}\right)$$

2P

$$\underline{\underline{t = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{\Delta T}{T - T_u}\right)}}$$

---

b) $$80 = 24 + \Delta T e^{-k \cdot 5}$$
$$69 = 24 + \Delta T e^{-10k}$$

0,5

$$: \left| \begin{array}{l} 56 = \Delta T e^{-5k} \\ 45 = \Delta T e^{-10k} \end{array} \right|$$

0,5

$$\frac{56}{45} = e^{5k} \Rightarrow \underline{k} = \frac{1}{5} \cdot \ln\left(\frac{56}{45}\right) = \underline{0{,}0437}$$

0,5

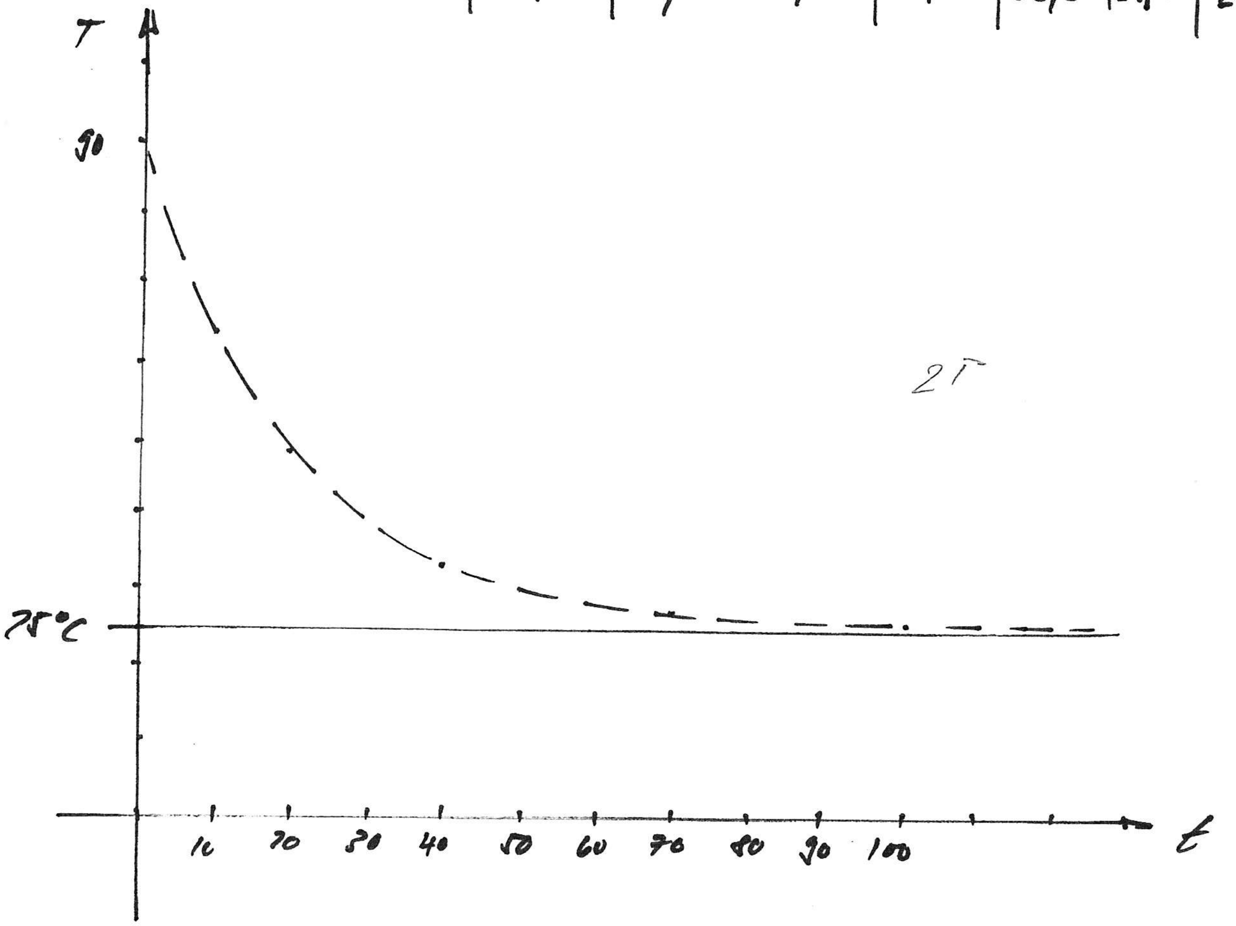
$$\Delta T = 56 \cdot e^{0{,}0437 \cdot 5} = 69{,}69°C$$

$$\underline{\underline{T_0}} = 24 + 69{,}69 = \underline{\underline{93{,}69°C}}$$ 0,5

3c) $T = f(t) = 25 + 65\, e^{-0,05\, t}$

Wertetabelle

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
T	90°C	64,4°C	48,91	39,5	33,8	30,3	28,2	27,0	26,2	25,7	25,4



2P

3d) zu Beginn mischen

$$T_g = \frac{1 \cdot 90 + 0{,}05 \cdot 3}{1{,}05} = 85{,}86\,°C$$

$$T(5) = 25 + (85{,}86 - 25) \cdot e^{-0{,}05 \cdot 5} = 72{,}40\,°C$$

nachher mischen

$$T(5) = 25 + (90 - 25) \cdot e^{-0{,}05 \cdot 5} = 75{,}62\,°C$$

2P

$$T_g(5) = \frac{1 \cdot 75{,}62 + 0{,}05 \cdot 3}{1{,}05} = 72{,}16\,°C$$

nachher mischen!

4 Anzahl 6er-Zelte: x

Anzahl 10er-Zelte: y 1P

$x, y \geq 0$

$x \leq 7$

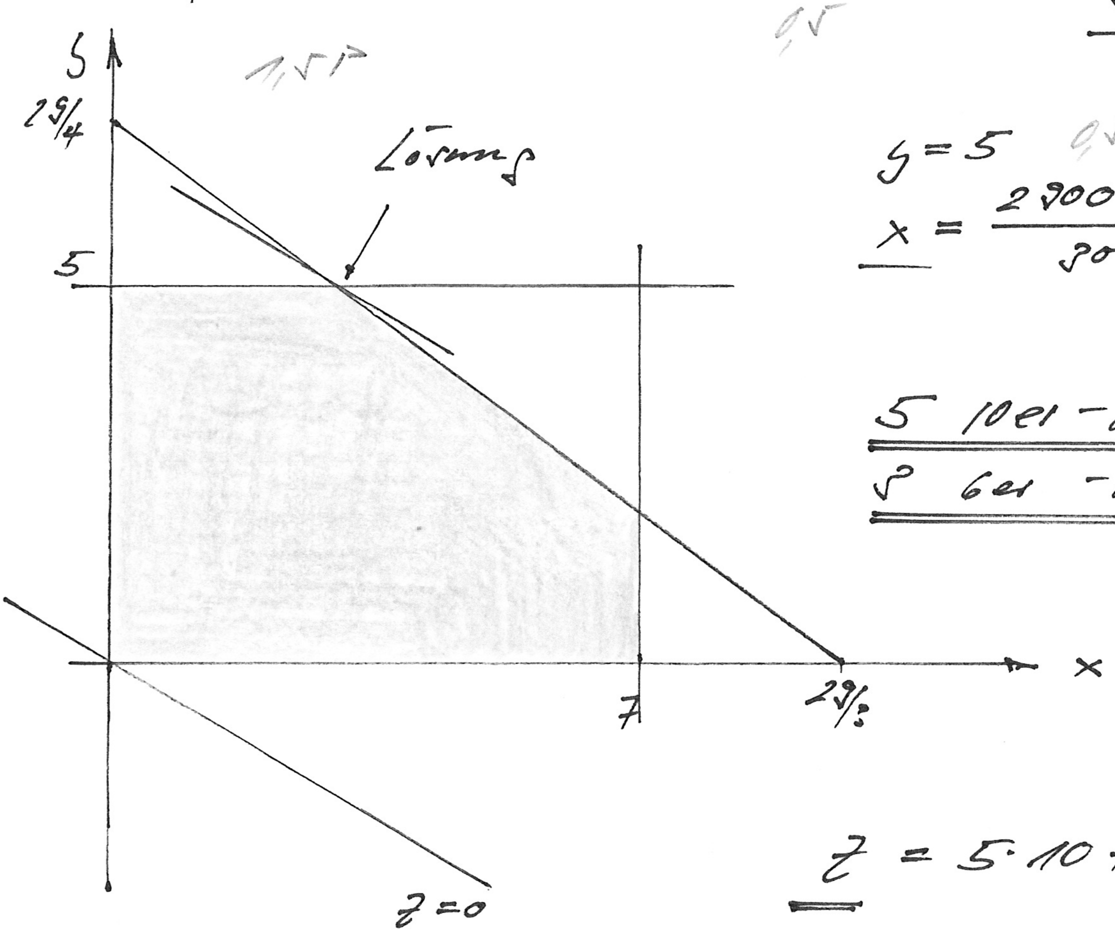
$y \leq 5$ 1P

$300x + 400y \leq 2900$ 0,5P

$$y \leq -\frac{3x}{4} + \frac{2900}{400}$$

$$y \leq -\frac{3x}{4} + \frac{29}{4}$$ 0,5P

Zielfunktion $z = 6x + 10y$ 0,5P $\Rightarrow$ $y = -\frac{3x}{5} + \frac{z}{10}$ 0,5P



$y = 5$ 0,5P

$x = \frac{2900 - 2000}{300} = 3$ 0,5P

5 10er-Zelte

3 6er-Zelte

0,5P

$z = 5 \cdot 10 + 3 \cdot 6 = 68$

(68 Jugendliche)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit den Unbekannten x, y an (2 Punkte). Für die Spezialfälle der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ skizzieren Sie die Graphen der beiden linearen Gleichungen und leiten daraus die Lösungsmenge des Systems ab (2 Punkte).

$$\left| \begin{array}{r} ax + (1-a)y = 1 \\ x + 2ay = 2 \end{array} \right|$$

Lösung

$$D = \begin{vmatrix} a & 1-a \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - 1 + a = (2a-1)(a+1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1-a \\ 2 & 2a \end{vmatrix} = 2a - 2 + 2a = 4a - 2 = 2(2a-1)$$ 1√

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1$$

Für $a \neq \frac{1}{2}$ und $a \neq -1$ gibt es genau ein Lösungspaar, nämlich:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(2a-1)}{(2a-1)(a+1)} = \frac{2}{a+1}$$ 1√

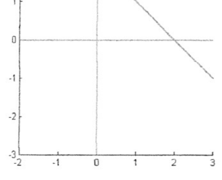
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{a+1}$$

Spezialfälle

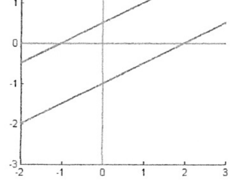
0,5√

Für $a = \frac{1}{2}$ folgt `das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{r} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right|$ (Bild 1: 2 zusammenfallende Geraden, unendliche Lösungsmenge.

Für $a = -1$ folgt `das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{r} -x + 2y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{array} \right|$ (Bild 2: 2 parallele Geraden, leere 0,5√ Lösungsmenge.



0,5√



0,5√

Aufgabe 6 (4 Punkte)

a) (2 Punkte) Geben Sie **alle** Lösungen in Grad an.

$$\cos\left(\frac{\alpha}{3}+15^0\right)=0$$

b) (2 Punkte) Geben Sie alle Lösungen im Intervall $[0,2\pi)$ im Bogenmass an.

$$3\sin(x)=1+\cos(2x)$$

Lösung zu a)

$$\cos\left(\frac{\alpha}{3}+15^0\right)=0$$

$$\frac{\alpha}{3}+15^0=90^0\pm k\cdot 180^0$$

$$\frac{\alpha}{3}=75^0\pm k\cdot 180^0$$

$$\alpha=225^0\pm k\cdot 540^0 \quad (k=0,1,2,...)$$

2P

Lösung zu b)

$$3\sin(x)=1+\cos(2x)$$

$$3\sin(x)=1+1-2\sin^2(x)$$

$$2\sin^2(x)+3\sin(x)-2=0$$

$$\sin(x)_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}$$

$$\sin(x)_1=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$$

$$x_1=\frac{\pi}{6}$$

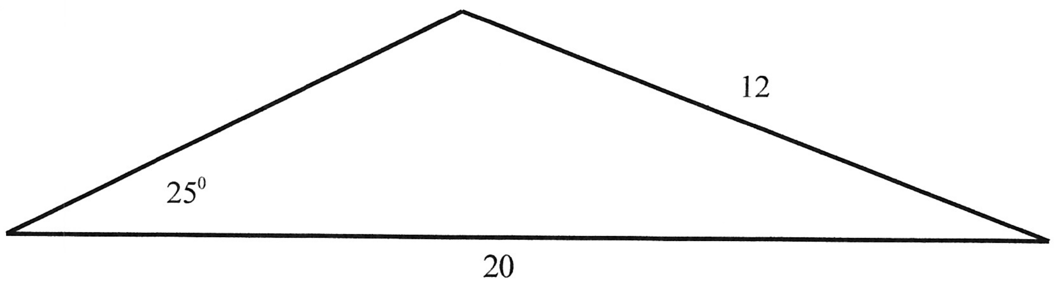
$$x_2=\frac{5\pi}{6}$$

2P

Die 2. Lösung der quadratischen Gleichung $\sin(x)_2=\frac{-3-5}{4}=-2$ gibt keine Lösung für x.

Aufgabe 7 (4 Punkte, 💻)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.



Lösung

Mit dem Sinussatz folgt der stumpfe Winkel γ:

$$\frac{\sin(\gamma)}{\sin(25^0)} = \frac{20}{12}$$

44,8°

$$\sin(\gamma) = \frac{20\sin(25^0)}{12} = 0.704$$

$$\gamma = 180^0 - \arcsin(0.704) = 180^0 - 44.8^0 = 135.2^0$$

Der Zwischenwinkel der Seiten 20 und 12 beträgt $\beta = 180^0 - 25^0 - 135.2^0 = 19.8^0$.

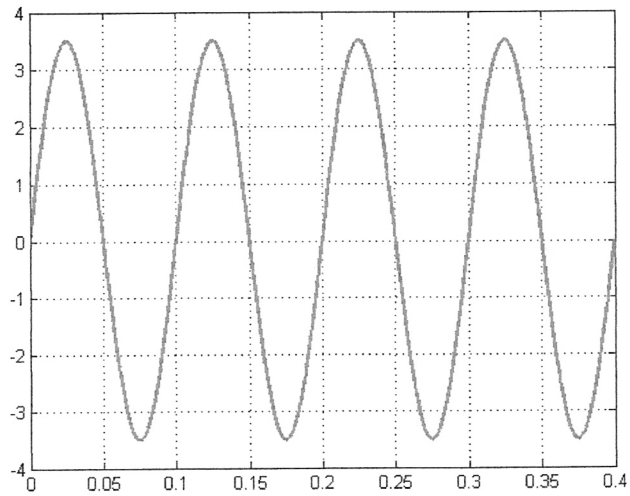
Damit beträgt die Fläche

$$A = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 12\cdot \sin(19.8^0) = 40.6.$$

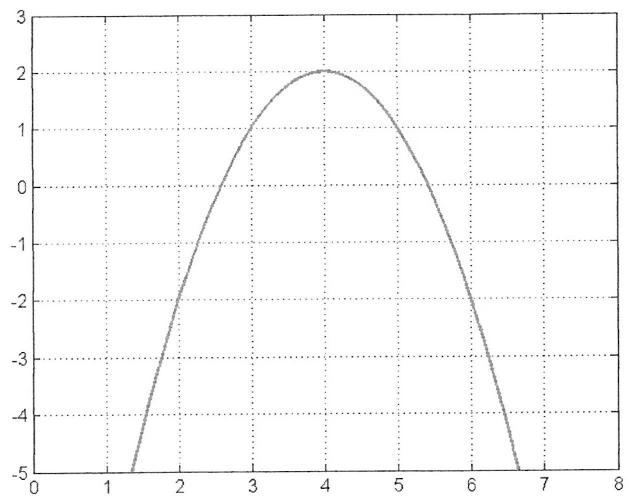
Aufgabe 8 (4 Punkte)

Geben Sie eine Gleichung für die Funktion an.

a)



b)



Lösungen

a) Der Graph der Sinusfunktion ist in x-Richtung auf das $\frac{0.1}{2\pi} = \frac{1}{20\pi}$-fache zusammengedrückt und in y-Richtung um den Faktor 3.5 gestreckt: $y = 3.5\sin(20\pi \cdot x)$ 2P

b) Der Graph der Normparabel ist an der x-Achse gespiegelt, 4 nach rechts und 2 nach oben verschoben:

$$y = -(x-4)^2 + 2 = -x^2 + 8x - 14$$

2P