

PHBern
Pädagogische Hochschule

Fachkonferenz Mathematik 2018, FHNW Windisch

**ÜBER EINEN POSITIVEN UMGANG
MIT FEHLERN UND
ÜBER NEGATIVES WISSEN**

Beat Jaggi

PHBern

INHALT

1. Einleitung
2. Mathematik ist ...
3. (Guter) Mathematikunterricht ist ...
4. Negatives Wissen ist ...
5. Positiver Umgang mit Fehlern ist ...
6. Fazit

PHBern, Beat Jaggi 27.10.18 2

1. EINLEITUNG

PHBern, Beat Jaggi 27.10.18 3

Einleitung

Wie «negatives Wissen» hilft, es besser zu machen

Aus Fehlern lernen



Professor Fritz Oser

Professor Fritz Oser

1. Vom Aufbau negativen Wissens

Aus Fehlern lernen, ist gesellschaftlich nicht immer akzeptiert. In vielen

Die Schülerin ist betroffen, weil sich die Lehrerin so aufregt.

Nehmen wir ein zweites Beispiel: Junge Piloten zur Ausbildung oder gestandene Piloten zur Weiterbildung im

PHBern, Beat Jaggi 27.10.18 4

Einleitung

profi

Magazin für das Lehren und Lernen

Nr. 1189 März 2009

Richtig falsch!

Von Fehlern und ihrer Richtigkeit



PHBern, Beat Jaggi 27.10.18 5

Einleitung

mathematiklehren

191

100 Jahre Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

MatheWelt



Fehler
Hindernis
und Chance

PHBern, Beat Jaggi 27.10.18 6

Einleitung



mathematiklehren
125
Fehler als Orientierungsmittel

Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 7

Einleitung



Marko Unger
Negatives Wissen im Kontext einer positiven Fehlerkultur

Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 8

Einleitung



mathematiklehren
135
Freude wecken - Ängste nehmen

Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 9

2. MATHEMATIK
IST ...

Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 10

Mathematik ist ...

die Kunst,
Muster zu erkennen.
(Ian Stewart)



Ian Stewart,
Mathematiker, 1943 -

Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 11

Mathematik ist ...

die Grammatik der Zahlen.
Hans Lohberger,
Schriftsteller (1920 bis 1979)

die Musik der Vernunft.
James Joseph Sylvester,
Mathematiker (1814 bis 1897)

ein geistreicher Luxus.
Friedrich der Grosse,
König von Preussen, Kurfürst von Brandenburg (1712 bis 1786)

Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 12

Mathematik ist ...
 eine anwendbare Wissenschaft
 eine beweisende Wissenschaft

Mathematik ist ...
 eine anwendbare Wissenschaft

Folgerung aus PISA:

Mathematik
 muss
 anwendbar
 sein!

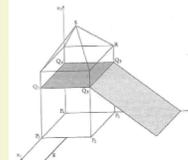


~~Beweise~~

„Realitätsnahe“ Aufgaben,
 Anwendungen

Auf einem Kinderspielplatz steht ein Stangengerät als Kletterturm. Es besteht aus einem Würfel mit den Eckpunkten $P, P', P'', Q, Q', Q'', Q'''$. Die Kantenlänge beträgt 3m. Die Diagonale Q, Q', Q'', Q''' des Würfels ist als eine massive Holzstange. An sie ist ein festes Quadergerüst aufgesetzt. Die Dachkanten laufen in Punkt S zusammen und bilden mit der Quaderfläche des aufgesetzten Quadergerüsts eine 2m hohe gerade quadratische Pyramide. Von der Kante Q, Q' führt eine 3m breite und 5m lange schräge Holzstange zum Boden. Die Kanten des Stangengerüsts liegen auf den Koordinatenachsen (x, y, z) ; die Grundfläche P, P', P'', P''' des Würfels liegt in der horizontalen x, y -Ebene (siehe Skizze).

Skizze (nicht maßstabgerecht)



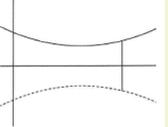
Aufgabe 4 (Differentialrechnung: 4 + 3 + 3)

Von einem ebenen Vorplatz aus muss eine Einfahrtsrampe auf ein höher gelegenes Parkgeschoß geplant werden. Dabei muss auf $p = 40$ m Horizontalabstand eine Höhe von 5 m überunden werden. Wieder am Anfang noch am Ende soll die Rampe einen "Knick" haben.

- a) Bestimme die generationale Funktion niedrigsten Grades, welche die geforderten Eigenschaften der Rampe erfüllt.



Aufgabe 4 (Differenzialrechnung: 2 | 5 | 1)
 Die Mantellinie eines Kühlturms kann näherungsweise durch eine quadratische Funktion beschrieben werden. Der Kühlturm wird dazu um 90° im Uhrzeigersinn gedreht und in die gezeichnete horizontale Lage gebracht.



Aus der Broschüre des KKW Gösgen sind die folgenden Daten für den Kühlturm entnommen:

- Höhe des Turms: **150 m**
- Basisdurchmesser: **117 m**
- Durchmesser oben: **74 m**
- Der kleinste Durchmesser ist auf der Höhe u und beträgt **70 m**

- Übertrage die Skizze auf das Lösungsblatt, beschrifte die Achsen und trage die gegebenen Daten aus der Broschüre deutlich ein.
- Bestimme die Funktionsgleichung einer Mantellinie.
- In welcher Höhe u hat der Turm den kleinsten Durchmesser? (auf Meter runden)

Pfeiler, Best Juggi 27.10.18 19

3.3 Ein Matrose beobachtet besorgt im Brauchwasser des Schiffes die Entwicklung einer Bakterienkultur. Jede Stunde kontrolliert er deren Entwicklung und nimmt Messdaten auf.

Messwertetabelle:

Zeitschritt t in Stunden(h)	0	1	2	3	4	5
Anzahl N Bakterien	600	1122	2098	3924	7337	13720

Handelt es sich annähernd um einen linearen oder exponentiellen Wachstumsprozess? Ermitteln Sie die entsprechende Modellgleichung der zugehörigen Wachstumsfunktion. Wieviel Keime befinden sich nach 8h und 30min im Brauchwasser, falls keine Gegenmassnahmen eingeleitet werden?

Pfeiler, Best Juggi 27.10.18 20

„Angehende Krankenschwestern brauchen
 lineare Funktionen:
 Wenn jemand am Tropf hängt,
 können sie ausrechnen,
 wie lange die Flasche mit dem
 Kochsalz noch reicht.“
 (Lehrperson einer
 Fachmittelschule für
 soziale Berufe)



Pfeiler, Best Juggi 27.10.18 21

**Mathematik ist ...
 eine anwendbare Wissenschaft**

- Optimieren
- Prognostizieren

Pfeiler, Best Juggi 27.10.18 22

**Mathematik ist ...
 eine anwendbare Wissenschaft**

Optimieren:

Möglichst geringer Materialverbrauch!

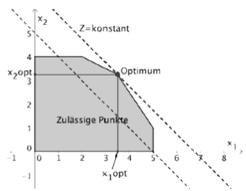


Pfeiler, Best Juggi 27.10.18 23

**Mathematik ist ...
 eine anwendbare Wissenschaft**

Optimieren:

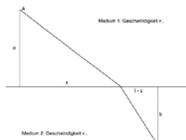
Lineare Optimierung:
 Gesucht: $\text{Max } f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 die Variablen x_1, x_2, \dots, x_n
 erfüllen ein System linearer Ungleichungen.



Pfeiler, Best Juggi 27.10.18 24

**Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft**

Optimieren: Brechungsgesetz von Snellius
Licht hat in verschiedenen Medien unterschiedliche Geschwindigkeit. Das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in den Medien 1 und 2 heisst Brechungsindex n . Das Licht legt den Weg von A nach B in möglichst kurzer Zeit zurück (Prinzip von Fermat).



**Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft**

Optimieren: Der Beweis der isoperimetrischen Ungleichung beruht auf einer Idee des Schweizer Mathematikers Jakob Steiner (1796 - 1863).



Jakob Steiner

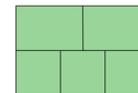


Steiner Symmetrisierung

**Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft**

Optimieren: Mit quadratischer Funktionen

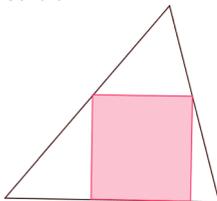
Mit insgesamt 630 Meter Zaun ist ein rechteckiges Stück Weideland einzuzäunen und - wie unten dargestellt - aufzuteilen. (Das auf dem Bild horizontale Zaunstück im Inneren des Rechtecks ist genau in der Mitte.)



Wie sind die Abmessungen des grünen Rechtecks zu wählen, damit dessen Fläche maximal wird?

**Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft**

Optimieren: Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck. Gesucht ist das grösste Quadrat, welches dem Dreieck eingeschrieben werden kann.



**Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft**

Prognostizieren:

**Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft**

Prognostizieren:

'best fit' (Optimierung):
 $f(t) = 7'099'151 \cdot 1.00944551^t$

Prognose: Bevölkerung im Jahre 2050:
 $f(50) = 7'099'151 \cdot 1.00944551^{50} \approx$

11'359'271

Jahr	t	Bevölkerungszahl
2000	0	7 164 444
2001	1	7 197 638
2002	2	7 255 853
2003	3	7 313 863
2004	4	7 364 148
2005	5	7 415 102
2006	6	7 459 128
2007	7	7 508 739
2008	8	7 553 494
2009	9	7 601 856
2010	10	7 685 806
2011	11	7 870 134
2012	12	7 964 662
2013	13	8 039 060
2014	14	8 139 631
2015	15	8 237 666

Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft

Prognostizieren:

Differentialgleichungen: $f'(t) = k f(t)$

Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft

Prognostizieren:

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft

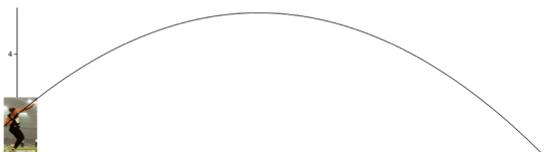
Prognostizieren:

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeit als beste
Schätzung/Prognose von relativen Häufigkeiten

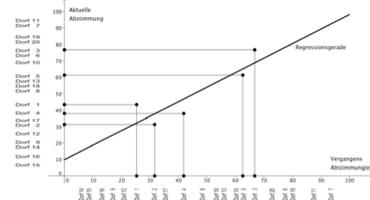
Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft

Prognostizieren:



Mathematik ist ...
eine anwendbare Wissenschaft

Optimieren und
Prognostizieren:



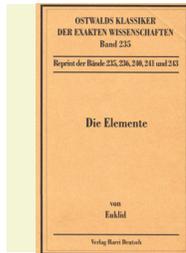
Mathematik ist ...
eine beweisende Wissenschaft

Mathematik ist ...
eine beweisende Wissenschaft

„In der Mathematik sind die
Dinge in ganz besonderer
Weise gewiss!“



Thomas Jahrike, Potsdam



Definitionen, Axiome

Satz,
Beweis,

Satz,
Beweis,

Satz,
Beweis,...

Beweisen/Argumentieren ist:

... das Ableiten streng formulierter Sätze
aus vorgegebenen Axiomen (MacLane, 1981)

... ein sozialer Akt (Lakatos, 1979)

Beweisen/Argumentieren ist:

... verstehen, warum etwas ist, wie es ist.

... sich fragen, ob etwas stimmt.

... sich fragen, ob etwas immer so ist.

... Andere überzeugen.

Zitate aus dem eidgenössischen Rahmenlehrplan BM, 2012

Mathematik im Grundlagenbereich fördert insbesondere auch
Kompetenzen wie Abstrahieren, **Argumentieren**,...

Reflexive Fähigkeiten: **logisch argumentieren**

Zitat aus dem Lehrplan für die Berufsmaturität des Kantons Bern:
Die **Beweisführung** in der Mathematik stellt eine ideale
Verbindung zu den Sprachen dar.

Mathematik ist ...



150
kompetenzorientierte
Prüfungsfragen

Mathematik ist ...

Kompetenzaspekte	
A1	Wissen, Erkennen und Beschreiben, Operieren und Berechnen, Instrumente und Werkzeuge verwenden
A2	Darstellen und Kommunizieren, Argumentieren und Begründen
A3	Erforschen und Explorieren, Mathematisieren und Modellieren, Interpretieren und Reflektieren der Resultate

Quelle: Hans Rudolf Schärer u.a., Berufsmaturität – Schwerpunktbereich, Arbeitsbuch, hep, 2102

Pfister, Beat Jaggi 27.10.18 43

Mathematik ist ...

Kompetenzbereich	Umschreibung
B1	Arithmetik, Algebra
B2	Funktionale Zusammenhänge
B3	Geometrie
B4	Daten und Zufall

Quelle: Hans Rudolf Schärer u.a., Berufsmaturität – Schwerpunktbereich, Arbeitsbuch, hep, 2102

Pfister, Beat Jaggi 27.10.18 44

Mathematik ist ...

Handlungsaspekte	Kompetenzbereiche		
	Zahl und Variable	Form und Raum	Grössen, Funktionen, Daten und Zufall
Operieren und Benennen			
Erforschen und Argumentieren			
Mathematisieren und Darstellen			

Quelle: Lehrplan 21 für die Volksschule

Pfister, Beat Jaggi 27.10.18 45

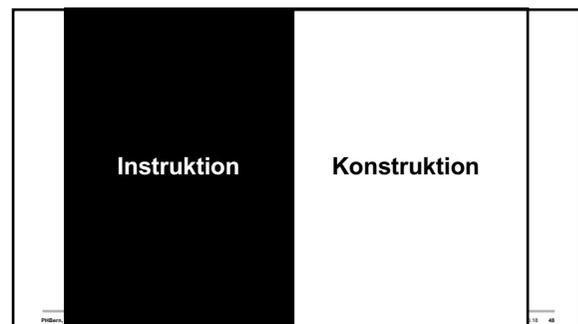
Mathematik ist ...

Handlungsaspekte	Kompetenzaspekte	
	Operieren und Benennen	A1 Wissen, Erkennen und Beschreiben, Operieren und Berechnen, Instrumente und Werkzeuge verwenden
	Erforschen und Argumentieren	A2 Darstellen und Kommunizieren, Argumentieren und Begründen
Mathematisieren und Darstellen	A3 Erforschen und Explorieren, Mathematisieren und Modellieren, Interpretieren und Reflektieren der Resultate	

Pfister, Beat Jaggi 27.10.18 46

3. (GUTER) MATHEMATIKUNTERRICHT
IST ...

Pfister, Beat Jaggi 27.10.18 47



Behaviorismus	Konstruktivismus
----------------------	-------------------------

<p>Lernen ist fremdbestimmt.</p> <p>Beim Lernen werden Unwissende (Sch) von Wissenden (LP) instruiert und geführt.</p> <p>Der Lernende trägt für den Lernvorgang nicht selber die Verantwortung.</p> <p>Lernen kann als Massenveranstaltung inszeniert werden.</p>	<p>Entdecken ist selbstbestimmt.</p> <p>Entdeckungen unternimmt man in eigener Regie.</p> <p>Entdeckungsreisende handeln auf eigene Rechnung und Gefahr. Sie tragen die Verantwortung.</p> <p>Jede und Jeder lernt anders.</p>
--	--

<p>Lernen erfolgt planmässig, methodisch, systematisch</p> <p>Fehlermachen ist verpönt. Fehler gilt es zu vermeiden – oder wenigstens zu verstecken!</p>	<p>Bei Entdecken spielen Zufall, Glück, Ahnung, Eingebung eine Rolle.</p> <p>Fehler sind erlaubt (vor der Prüfung). Aus Fehlern kann man lernen!</p>
--	--

Nach Diskussionen und Studium einschlägiger Literatur:

7 Eckpfeiler/Mosaiksteine eines modernen Mathematikunterrichtes

- Aktiv entdeckendes Lernen
- Selbstverantwortung
- Differenzierung
- Erkenntnissicherung/Reflexion
- Positiver Umgang mit Fehlern
- Individuelles, dialogisches und kooperatives Lernen
- Anknüpfen an Vorwissen

Nach Diskussionen und Studium einschlägiger Literatur:

7 Eckpfeiler/Mosaiksteine eines modernen Mathematikunterrichtes

- Aktiv entdeckendes Lernen
- Selbstverantwortung
- Differenzierung
- Erkenntnissicherung/Reflexion
- **Positiver Umgang mit Fehlern -> Vortrag 2018**
- Individuelles, dialogisches und kooperatives Lernen
- Anknüpfen an Vorwissen

4. NEGATIVES WISSEN

IST ...

Wissen ist ...???????

Als **Wissen** wird üblicherweise ein für Personen oder Gruppen verfügbarer Bestand von Fakten, Theorien und Regeln verstanden, die sich durch den grösstmöglichen Grad an Gewissheit auszeichnen, so dass von ihrer Gültigkeit bzw. Wahrheit ausgegangen wird. (Wikipedia, Abruf am 25. Oktober 2018)

Negatives Wissen ist «schlecht»!?! ☹

Negatives Wissen ist «hinderlich»!?! ☹

Negatives Wissen ist «unnützlich»!?! ☹

Wissensarten bei der PISA-Studie

Wissen, das man braucht, um eine Mathematikaufgabe zu lösen:

- Faktenwissen (Wissen, **was**)
- prozedurales Wissen (Wissen, **wie**)
- konzeptuelles Wissen (Wissen, **warum**)

- Faktenwissen (Wissen, **was**)

Was ist der Mittelwert der Zahlen a und b ?

- prozedurales Wissen (Wissen, **wie**)

Berechne den Mittelwert der Zahlen a und b ?

- konzeptuelles Wissen (Wissen, **warum**)

Welche Zahl liegt auf dem Zahlenstrahl genau in der Mitte der beiden Zahlen a und b ?

Wissensarten nach Oser

(positives) deklaratives Wissen:
Wissen, wie/was etwas ist

negatives deklaratives Wissen:
Wissen, wie/was etwas nicht ist

(positives) prozedurales Wissen:
Wissen, wie etwas funktioniert

negatives prozedurales Wissen:
Wissen, wie etwas nicht funktioniert

(positives) konzeptuelles Wissen:
Wissen, warum etwas geht

negatives konzeptuelles Wissen:
Wissen, warum etwas nicht geht

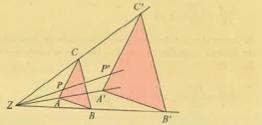
Wissensarten nach Oser

(positives) strategisches Wissen:
Wissen, was zur Lösung führt

negatives strategisches Wissen:
Wissen, was nicht zur Lösung führt

Konsequenzen von fehlendem negativem Wissen:

Definition Zentrische Streckung
Eine Abbildung, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' zuordnet, heisst *zentrische Streckung* mit dem *Streckungszentrum* Z und dem *Streckungsfaktor* k , falls $P' \in ZP$ und $ZP' = |k| \cdot ZP$.



Quelle: Marthaler, Jakob, Schudel: Mathematik II, Geometrie für Berufsmaturitätsschulen, hep-Verlag, 2011

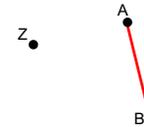
Konsequenzen von fehlendem negativem Wissen:

Eigenschaften der zentrischen Streckung

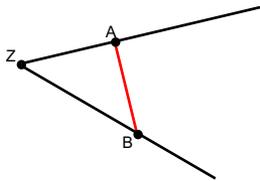
- Gleichsinnige Abbildung** Die Orientierung bleibt erhalten.
- Paralleltreue** Parallele Geraden bleiben parallel.
- Winkeltreue** Das Bild eines Winkels ist stets ein Winkel gleicher Grösse.
- Verhältnistreue** Das Verhältnis der Längen sich entsprechender Seiten bleibt erhalten. So ist der Quotient aus der Länge der Bildstrecke und der Länge der Originalstrecke konstant und gleich dem Streckungsfaktor k .

Quelle: Marthaler, Jakob, Schudel: Mathematik II, Geometrie für Berufsmaturitätsschulen, hep-Verlag, 2011

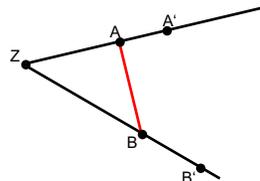
Aufgabe: Die Strecke AB ist vom Zentrum Z aus mit dem Faktor $k = 1.5$ zu strecken.



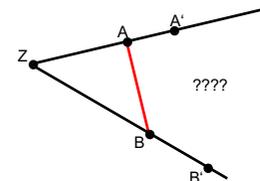
Aufgabe: Die Strecke AB ist vom Zentrum Z aus mit dem Faktor $k = 1.5$ zu strecken.



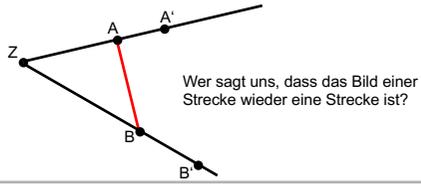
Aufgabe: Die Strecke AB ist vom Zentrum Z aus mit dem Faktor $k = 1.5$ zu strecken.



Aufgabe: Die Strecke AB ist vom Zentrum Z aus mit dem Faktor $k = 1.5$ zu strecken.



Aufgabe: Die Strecke AB ist vom Zentrum Z aus mit dem Faktor $k = 1.5$ zu strecken.



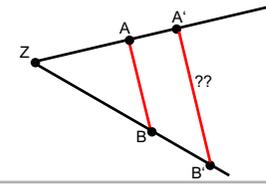
„Nutzen“ von negativem Wissen:

Eigenschaften der zentrischen Streckung

- Gleichsinnige Abbildung* Die Orientierung bleibt erhalten.
- Paralleltreue* Parallele Geraden bleiben parallel.
- Winkeltreue* Das Bild eines Winkels ist stets ein Winkel gleicher Grösse.
- Verhältnistreue* Das Verhältnis der Längen sich entsprechender Seiten bleibt erhalten. So ist der Quotient aus der Länge der Bildstrecke und der Länge der Originalstrecke konstant und gleich dem Streckungsfaktor k .

Quelle: Marthaler, Jakob, Schudel: Mathematik II, Geometrie für Berufsmaturitätsschulen, hep-Verlag, 2011

Aufgabe: Die Strecke AB ist vom Zentrum Z aus mit dem Faktor $k = 1.5$ zu strecken.



Aufgabe: Die Strecke AB ist vom Zentrum Z aus mit dem Faktor $k = 1.5$ zu strecken.

Fazit: Die wichtigste Eigenschaft einer zentrischen Streckung, die Strecken- oder Geradentreue ist so selbstverständlich, dass offenbar nicht einmal die Autoren deren Fehlen in der Liste bemerkt haben!!

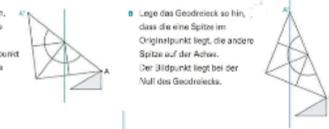
„Aufbau“ von negativem Wissen:

Botschaft an unsere Schülerinnen und Schüler:

Es gibt geometrische Abbildungen, die nicht geradentreu sind!!

„Aufbau“ von negativem Wissen:
Es gibt geometrische Abbildungen, die nicht geradentreu sind!!

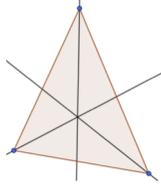
- Lege das Geodreieck so hin, dass die Null auf der Achse liegt und die eine Spitze im Originalpunkt. Der Bildpunkt liegt bei der anderen Spitze des Geodreiecks.
- Lege das Geodreieck so hin, dass die eine Spitze im Originalpunkt liegt, die andere Spitze auf der Achse. Der Bildpunkt liegt bei der Null des Geodreiecks.



Quelle: mathbu.ch

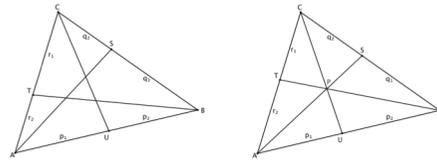
„Aufbau“ von negativem Wissen:

Satz: Die Winkelhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt.



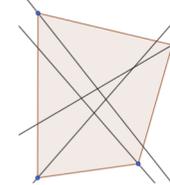
„Aufbau“ von negativem Wissen:

Satz von Ceva: Drei Transversalen in einem Dreieck schneiden sich genau dann, wenn gilt: $p_1 \cdot q_1 \cdot r_1 = p_2 \cdot q_2 \cdot r_2$



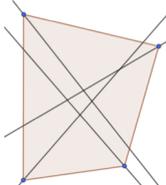
„Aufbau“ von negativem Wissen:

Satz: Die Winkelhalbierenden in einem **Viereck** schneiden sich ...



„Aufbau“ von negativem Wissen:

Satz: Die Winkelhalbierenden in einem **Viereck** schneiden sich in der Regel nicht!



„Aufbau“ von negativem Wissen:

$$x^2 + px + q = 0$$

Konsequenzen von fehlendem negativem Wissen:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Negatives Wissen ist ...

Konsequenzen von fehlendem negativem Wissen:
12 Quadratische Gleichungen

61 a) $(x+2)(x+5) = 0$	b) $x^2 - 8x + 15 = 0$
62 a) $x^2 - 4x - 21 = 0$	b) $x^2 + 12x - 28 = 0$
63 a) $x^2 + 2x = 24$	b) $x^2 - 3x = 40$
64 a) $x^2 - 14x = -49$	b) $x^2 + 13x = -36$
65 a) $y^2 - 21y + 20 = 0$	b) $z^2 - z - 72 = 0$
66 a) $n^2 + n - 2 = 0$	b) $k^2 + 20k + 100 = 0$

Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 85

Negatives Wissen ist ...

Konsequenzen von fehlendem negativem Wissen:
 $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)????$

**Botschaft:
Es geht (fast) nie!!!**

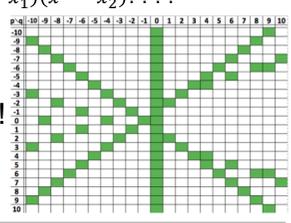
Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 86

Negatives Wissen ist ...

Konsequenzen von fehlendem negativem Wissen:
 $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)????$

**Botschaft:
Es geht (fast) nie!!!**

Anteil der grünen Flächen: 17 %

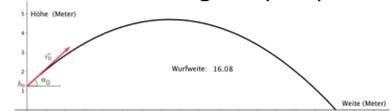


Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 87

Negatives Wissen ist ...

Konsequenzen von fehlendem negativem Wissen:
 $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)????$

Botschaft: Es geht (fast) nie!!!



$$y = \frac{-g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha_0} \cdot x^2 + \tan \alpha_0 \cdot x + h_0$$

Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 88

Negatives Wissen ist ...

„Aufbau“ von negativem Wissen ...

**geschieht durch
Fehler machen!!!**

Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 89

Negatives Wissen ist ...

„Aufbau“ von negativem Wissen:
„Bei Entdecken spielen Zufall, Glück, Ahnung, Eingebung eine Rolle.“

**Negatives Wissen kann
als Orientierungshilfe dienen!**

Pfeiler, Best Jaggi 27.10.18 90

5. POSITIVER UMGANG MIT FEHLERN **IST ...**

Aus einem Artikel von Fritz Oser:

Ob grosse oder kleine, ob Rechen- oder Grammatik-, ob moralische oder orthographische - in erster Linie und prinzipiell sind Fehler unbeliebt.

Zwar werden sie - für Noten - gerne gezählt. Doch noch lieber werden sie ausgemerzt, verbessert, totgeschwiegen oder übergangen.

Wie in jener Situation, die jeder aus der Schule kennt. Die Lehrerin stellt eine Frage: «Wie berechnet man den Umfang eines Rechtecks?» Der erste aufgerufene Schüler antwortet: «Länge mal Breite».

Wortlos, leicht ungeduldig wendet sich die Lehrerin an den nächsten Schüler, der sich meldet, und erhält die Antwort: «Länge plus Breite mal zwei». Richtig. Alles atmet auf, der Unterricht kann weitergehen.

Mit dem wortlosen Übergehen der falschen Antwort wird nicht nur der Schüler, der sie gab, sozusagen zum Verschwinden gebracht.

Es verschwindet vor allem auch der Nutzen, die Erhellung, die seine falsche Antwort hätte bieten können: In diesem Falle der wesentliche Unterschied zwischen einer Fläche und einer Strecke, zwischen einer Multiplikation und einer Addition. «Das Lernpotenzial dieser Situation verschwindet wie ein Flugzeug im Bermudadreieck.»

Der Königsweg zum negativen Wissen führt über den allseits verpönten Fehler: Fehler sind aus dieser Sicht nichts anderes als ein Mittel, um negatives Wissen aufzubauen und positives gleichzeitig zu betonen.

Eine positive Fehlerkultur zeichnet sich zunächst dadurch aus, dass dem Fehler Platz und Zeit eingeräumt wird: Fehlermachen ist erlaubt, an Fehlern wird gearbeitet, das Erhellungspotenzial des Fehlers wird benutzt.

Heute werden Fehler kaum mehr drakonisch bestraft - ganz im Gegenteil: «Heute werden Fehler banalisiert, nicht ernst genommen, durchgelassen. Und dann kommt die Klage, dass unsere Schüler zu wenig wissen.» Ein Problem der heutigen Schulkultur besteht darin, dass Lehrpersonen oft nicht auf klaren Anforderungen bestehen, weil sie diese für psychologisch schädlich halten. Es ist eine Verkitschung der Pädagogik im Namen einer Wohlbefindenskultur, die jeden Zusammenhang mit Leistung zu verlieren droht.

Positiver Umgang mit Fehlern ist ...

Hier soll die Fehlerkultur mit ihrer klaren und thematisierten Unterscheidung zwischen richtig und falsch ansetzen, soll die Möglichkeit dafür schaffen, dass wieder vermehrt klare Erwartungen formuliert werden.

Pfeifer, Beate Jaggi 27.10.18 97

Positiver Umgang mit Fehlern ist ...

Allgemeines: Erziehungswissenschaft, allgemeine Didaktik

Ein positiver Umgang mit Fehlern zunächst erfordert ein 'positives' Klima in der Schulklasse!



Freude wecken - Ängste nehmen

- angstfrei
- positive Fehlerkultur
- positive Emotionen
- kein Blossstellen

Pfeifer, Beate Jaggi 27.10.18 98

Positiver Umgang mit Fehlern ist ...

Allgemeines: Erziehungswissenschaft, allgemeine Didaktik

Ein positiver Umgang mit Fehlern erfordert ein 'positives' Klima in der Schulklasse!

- angstfrei
- positive Fehlerkultur
- positive Emotionen
- kein Blossstellen

Freude erhöhen - Rezept I

- 1) Strukturisiert unterrichten
- 2) Basiserfordernisse machen lassen
- 3) Eine Kultur des Fragens etablieren
- 4) Einen offenen Umgang mit Fehlern etablieren
- 5) Das spielerische Charakter der Mathematik hervorheben
- 6) Mehr die Arbeitsprozesse und weniger die Resultate loben
- 7) Individuelle Leistungsfortschritte unabhängig vom Leistungsniveau der Klasse loben
- 8) Bei Unsicherheiten, dass es einen selber Spaß macht

Angst mindern - Rezept II

- 1) Prüfungsaufforderungen insgesamt machen
- 2) Aufgaben in erforderspezifischer Reihenfolge machen
- 3) Prüfungsaufforderungen Aufgaben stellen
- 4) Antwortalternativen vorgeben
- 5) Externe Gedächtnisstützen erlauben
- 6) Prüfungsaufgaben von einer Reihe von Alternativen gelöst werden lassen
- 7) Das Scheitern bei Prüfungen so gut wie möglich reduzieren
- 8) Vor den Prüfungen Aufmunterung aussprechen, die den Leistungsdruck erlösen
- 9) Prüfungsaufgaben für Schüler erörtern, sich nicht mit ihrer Prüfungsangst beschäftigen

Pfeifer, Beate Jaggi 27.10.18 99

Positiver Umgang mit Fehlern ist ...

Allgemeines: Erziehungswissenschaft, allgemeine Didaktik

Ein positiver Umgang mit Fehlern erfordert ein 'positives' Klima in der Schulklasse!

- angstfrei
- positive Fehlerkultur
- positive Emotionen
- kein Blossstellen

4. Einen offenen Umgang mit Fehlern etablieren
 Ein konstruktiver Umgang mit Fehlern gibt den Schülerinnen und Schülern Sicherheit – sie sind ihren falschen Lösungswegen nicht „unkontrollierbar“ ausgeliefert, sondern können aus ihnen lernen. Fehler können als interessanteste Lerngelegenheiten betrachtet werden, die für alle Schüler dadurch gewinnbringend sind, dass sie vor ihnen „gewarnt“ werden und dadurch nicht selber in spezifische „Fehlerfallen“ tappen. Eine Analyse dessen, was falsch gemacht wurde, kann somit für alle gesund und hilfreich sein.

Pfeifer, Beate Jaggi 27.10.18 100

Positiver Umgang mit Fehlern ist ...

Allgemeines: Erziehungswissenschaft, allgemeine Didaktik

Ein positiver Umgang mit Fehlern erfordert ein 'positives' Klima in der Schulklasse!

- angstfrei
- positive Fehlerkultur
- positive Emotionen
- kein Blossstellen

Emotionales Erleben im Mathematikunterricht

Für das Entstehen von Emotionen während einer Tätigkeit sind zwei Aspekte von zentraler Bedeutung:

- Das Ausmass, in welchem man glaubt, die Dinge unter Kontrolle zu haben.
- Das Ausmass, in welchem man das, was man tut, als **wichtig** erfährt.

Pfeifer, Beate Jaggi 27.10.18 101

Positiver Umgang mit Fehlern ist ...

Folgerung:

Die Schülerinnen und Schüler müssen das Gefühl haben, dass das, was sie tun, wichtig ist.

3.3. Ein Matrose beobachtet besorgt im Brauchwasser des Schiffes die Entwicklung einer Bakterienkultur. Jede Stunde kontrolliert er deren Entwicklung und nimmt Messdaten auf.

Jahr	t	Bevölkerungszahl
2000	0	7 164 444
2001	1	7 197 638
2002	2	7 255 653
2003	3	7 313 853
2004	4	7 364 148
2005	5	7 415 102
2006	6	7 459 128
2007	7	7 508 739
2008	8	7 593 494
2009	9	7 701 856
2010	10	7 785 806
2011	11	7 870 134
2012	12	7 954 662
2013	13	8 039 060
2014	14	8 139 631
2015	15	8 237 666

Messwertetabelle:

Zeitschritt t in Stunden(h)	0	1	2	3	4	5
Anzahl N Bakterien	600	1122	2098	3924	7337	13720

Handelt es sich annähernd um einen linearen oder exponentiellen Wachstumsprozess? Ermitteln Sie die entsprechende Modellgleichung der zugehörigen Wachstumsfunktion. Wieviel Keime befinden sich nach 8h und 30min im Brauchwasser, falls keine Gegenmassnahmen eingeleitet werden?

Pfeifer, Beate Jaggi 27.10.18 102

Folgerung:

Die Schülerinnen und Schüler müssen das Gefühl haben, dass das, was sie tun, wichtig ist.

-> Wirkliche Anwendungen der Mathematik behandeln!

Allgemeines: Erziehungswissenschaft, allgemeine Didaktik

Ein positiver Umgang mit Fehlern zunächst erfordert ein 'positives' Klima in der Schulklasse!

- angstfrei
- positive Fehlerkultur
- positive Emotionen
- kein Blossstellen



Allgemeines: Erziehungswissenschaft, allgemeine Didaktik

Ein positiver Umgang mit Fehlern zunächst erfordert ein 'positives' Klima in der Schulklasse!

- angstfrei
- positive Fehlerkultur
- positive Emotionen
- kein Blossstellen

Tipps für die Lehrperson:

- Zeit nehmen, kein Blossstellen
- Erklären lassen und differenziert loben
- Fehler beim Lernen nicht bewerten
- Negative Schülerreaktionen unterbinden
- Auch nonverbal angemessen reagieren

Allgemeines: Erziehungswissenschaft, allgemeine Didaktik

Der Genderaspekt:

	machen keine Fehler	machen Fehler
Mädchen/Frauen	„Ich habe Glück gehabt!“	„Ich kann es halt nicht!“
Knaben/Männer	„Ich bin halt gut!“	„Ich habe Pech gehabt!“

Allgemeines: Erziehungswissenschaft, allgemeine Didaktik

Ein positiver Umgang mit Fehlern zunächst erfordert ein 'positives' Klima in der Schulklasse!

- angstfrei
- positive Fehlerkultur
- positive Emotionen
- kein Blossstellen



Jaggi's Unterricht basiert auf sieben Säulen oder Eckpfeilern:

- **Positiver Umgang mit Fehlern** (Ein sehr wichtiger Punkt: Fehler geschehen, aus Fehlern kann man lernen. Es ist nicht angebracht, andere wegen Fehlern zu kritisieren oder gar auszuschließen!)

Die «Königsdizziplin» des Fehlermachens:

Die elementare Algebra!!!!

$$|a + b| = |a| + |b|$$

Für welche Werte von a und b stimmt die Gleichung??

$$\frac{x+3}{3x} \neq \frac{x+1}{x}$$

$$\frac{x+3}{3x} = \frac{x+1}{x}$$

Für welche Werte von x stimmt die Gleichung??

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

Für welche anderen Brüche geht das auch?

Weitere Idee:
Es müssen nicht alle Fehler öffentlich werden!

Strukturierte Aufgaben

„Bigeli“-Rechnen (nicht strukturiert)

$$\begin{aligned}23 \cdot 31 \\ 54 \cdot 22 \\ 11 \cdot 85 \\ 67 \cdot 66 \\ 39 \cdot 48\end{aligned}$$

Strukturiertes Üben

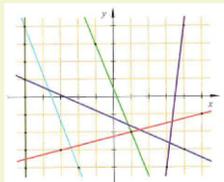
$$\begin{aligned}20 \cdot 20 \\ 19 \cdot 21 \\ 18 \cdot 22 \\ 17 \cdot 23 \\ 16 \cdot 24\end{aligned}$$

Strukturiertes Üben

$$\begin{aligned}20 \cdot 20 &= 400 \\ 19 \cdot 21 &= 399 \\ 18 \cdot 22 &= 396 \\ 17 \cdot 23 &= 391 \\ 16 \cdot 24 &= 384\end{aligned}$$

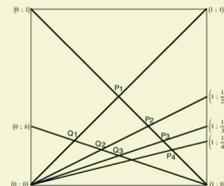
$$(20 - a)(20 + a) = 20^2 - a^2$$

Unstrukturiertes Üben



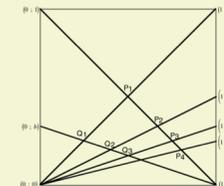
Bestimmen Sie die Gleichungen der abgebildeten Geraden und die Koordinaten der Schnittpunkte.

Strukturiertes Üben



In einem Quadrat der Seitenlänge 1 sind Geraden gezeichnet. Bestimmen Sie die Gleichungen der abgebildeten Geraden und die Koordinaten der Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, \dots sowie Q_1, Q_2, \dots .

Strukturiertes Üben



$$P_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right); P_2 \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right); P_3 \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4} \right); P_4 \left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5} \right);$$

Vorteile strukturierter Aufgaben/Übungen

- Aufgaben werden reichhaltiger
- Aufgaben sind in der Regel selbst korrigierend
-> Fehler gelangen nicht direkt an die Öffentlichkeit!
- Aufgaben enthalten innere Differenzierung

Zurück zum negativen Wissen

Zurück zum negativen Wissen

Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft!

Zurück zum negativen Wissen

Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft!

Was bedeutet 'negatives Wissen' im Zusammenhang mit Argumentieren?

Zurück zum negativen Wissen

Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft!

Was bedeutet 'negatives Wissen' im Zusammenhang mit Argumentieren?

Beweisen versus **negatives Wissen**
Ist es immer so? Wie ist es nicht?

„Satz“: Für positive reelle Zahlen a, b gilt:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$$

„Satz“: Für positive reelle Zahlen a, b gilt:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$$

„Beweis“: Da a, b positiv sind, gibt es ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b .
Nach Pythagoras misst die Diagonale d des Rechteckes $\sqrt{a^2 + b^2} = d$

Nun approximieren wir die Diagonale des Rechteckes mit einer Folge von Streckenzügen an.



Dargestellt sind die Streckenzüge L_8 und L_{34} .
Für $\epsilon > 0$ gibt es ein N so, dass für $n > N$ der Streckenzug L_n ganz in der ϵ -Umgebung der Diagonalen d liegt.
Wegen $|L_n| = a + b$ folgt $d = \lim_{n \rightarrow \infty} |L_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + b) = a + b$.
 $|L_n|$ ist dabei die Länge des Streckenzuges.

„Satz“: 1 ist die grösste Zahl.

„Satz“: $4 = 5$.

„Satz“: Jedes Dreieck ist gleichseitig.

Negatives Wissen

Zurück zum negativen Wissen

Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft!

Was bedeutet 'negatives Wissen' im Zusammenhang mit Argumentieren?

Tatsache: Schülerinnen und Schüler sehen den Sinn von Beweisen nicht ein!

Es gilt, ihnen auch Dinge zu präsentieren, die nicht stimmen;
Argumente vorzulegen, die offenbar falsch sind!

6. FAZIT

Es geht darum, ein 'gutes'
Klassenklima zu schaffen.
Das kann eine Herkulesaufgabe
sein!

Fehler können genützt werden,
um negatives Wissen aufzubauen.
Dieses wiederum hilft, weitere
Fehler zu verhindern!

Es geht für die Lehrperson darum,
den Schülerinnen und Schülern
nicht nur Dinge zu präsentieren, die
stimmen, sondern auch solche,
die nicht stimmen!

8. a) $2x-3y$	$2x+3y$	$8x^2+18y^2$	b) $5a-6b$	$2a-b$	$a^2-37ab+28b^2$
$2x+3y$	$2x-3y$	$4x^2-9y^2$	$4a+4b$	$3a-3b$	$12a^2-12b^2$
c) $2x^2+15x-3$	$2x^2-3$	$p-1$	$2p$	$2b$	$r+1$
$18p^2-8$	$15a+10$	$12p-8$	d) m^2-p^2	r^2-m	$r+1$
e) a^2-b^2	$a-b$	$b^2-a^2+4a^2b$	g) $\frac{1}{x+1}$	$\frac{2}{x^2-1}$	$\frac{1}{x^2-1}$
$24ab$	$a+b$	$200(a-ab^2)$	h) $\frac{1}{x+1}$	$\frac{2}{x^2-1}$	$\frac{1}{x^2-1}$
i) x^2-y	$x-y$	$4xy$	j) $\frac{1}{p^2+1}$	$\frac{2}{p^2-1}$	$\frac{1}{p^2-1}$
y	x	x^2+y^2	k) $m-3$	m^2-3m+3	$m-5$
l) $3a-2b$	$2a-3b$	a^2-b^2	m) $m+4$	m^2+m-12	$m-3$
n) $\frac{2}{x-3}$	$\frac{3}{x-1}$	$\frac{1}{x+5}$	o) $\frac{a}{a-b}$	$\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}$	$\frac{a-b}{a^2-p^2}$

versus

Wirkliche
Anwendungen
der
Mathematik

VIELEN DANK FÜR DIE POSITIVE AUFMERKSAMKEIT!!