

Fachkonferenz Mathematik 2022

Modellierungen

René Fehlmann

29. Oktober 2022

Modellierungen

Handout / Slides

Alle Unterlagen unter:

<https://drive.switch.ch/index.php/s/cXqPo9zZ9V5kkov>



Modellierungen

Organisation des Workshops

- ▶ Übersicht der Modelle / Differentialgleichungen
- ▶ Vorführung der numerischen Integration eines Wachstumsmodells mit GeoGebra
- ▶ Hands-on: Teilnehmerinnen und Teilnehmer setzen Modell(e) ihrer Wahl um

Modellierungen

Organisation des Workshops

- ▶ Übersicht der Modelle / Differentialgleichungen
- ▶ Vorführung der numerischen Integration eines Wachstumsmodells mit GeoGebra
- ▶ Hands-on: Teilnehmerinnen und Teilnehmer setzen Modell(e) ihrer Wahl um

Modellierungen

Organisation des Workshops

- ▶ Übersicht der Modelle / Differentialgleichungen
- ▶ Vorführung der numerischen Integration eines Wachstumsmodells mit GeoGebra
- ▶ Hands-on: Teilnehmerinnen und Teilnehmer setzen Modell(e) ihrer Wahl um

Modellierungen

Aufschlag im Tennis

geogebra.org

GeoGebra

EINHEIT ERSTELLEN

Aufschlag im Tennis

Autor: René Fehlmann
Thema: Differentialgleichungen

Gravitation Luftwiderstand
 Magnuskraft geradlinige Bahn

$\phi = -4.4^\circ$ $\omega_r = 10$
 $\alpha = -2.4^\circ$ $\omega_b = 210$
 $v_0 = 50$ $\omega_s = 215$
 $KG = 1.85$ $W = 1$

$P = (5.74, -0.18)$
 $\omega = 300.71 \text{ rad/s}$

2.78

<https://www.geogebra.org/m/mx9nrjvf>

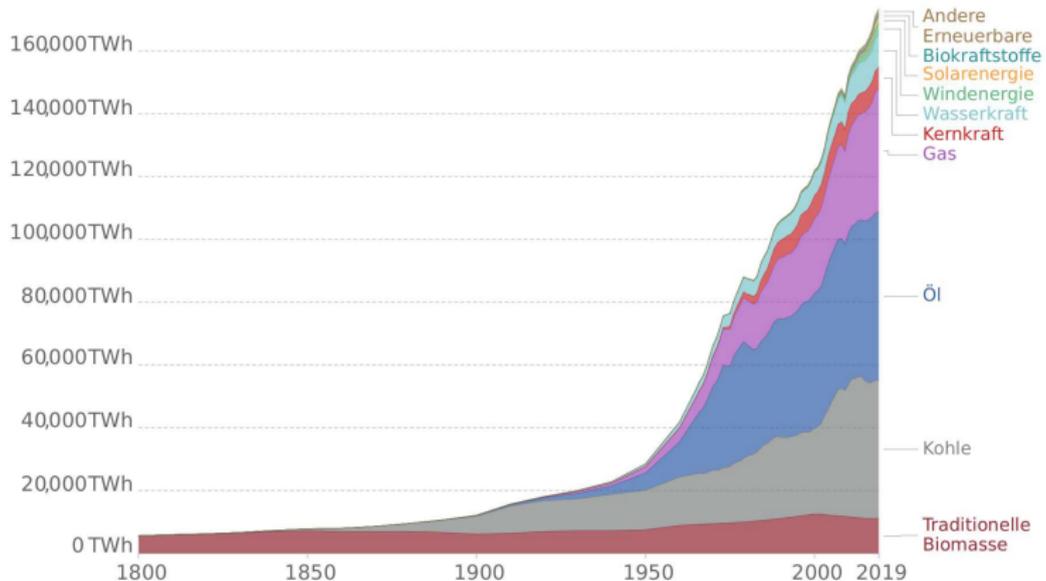
Modellierungen

Übersicht

Wachstum

Weltweiter Primärenergieverbrauch nach Energieträgern

Primärenergie ist nach Substitutionsmethode berechnet so dass Ineffizienzen beim Einsatz fossiler Energieträger berücksichtigt sind



Quelle: Vaclav Smil (2017) & BP Statistical Review of World Energy

OurWorldInData.org/energy



Modellierungen

Übersicht

Wachstum

Eine Differentialgleichung

$$f'(t) = kf(t)$$

$$f(0) = a$$

Modellierungen

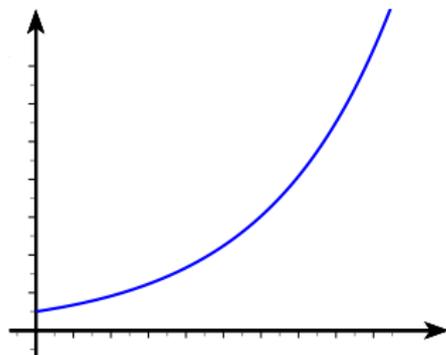
Übersicht

Wachstum

Eine Differentialgleichung

$$f'(t) = kf(t)$$

$$f(0) = a$$



Modellierungen

Übersicht

Wachstum

Eine Differentialgleichung

$$f'(t) = k(G - f(t))$$

$$f(0) = a$$

Modellierungen

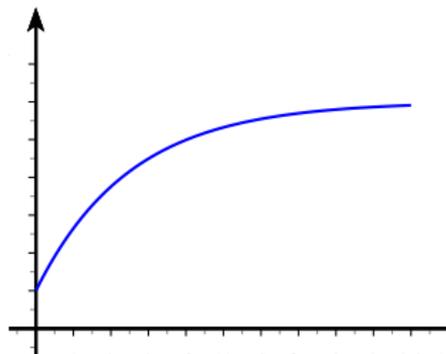
Übersicht

Wachstum

Eine Differentialgleichung

$$f'(t) = k(G - f(t))$$

$$f(0) = a$$



Modellierungen

Übersicht

Wachstum

Eine Differentialgleichung

$$f'(t) = kf(t)(G - f(t))$$

$$f(0) = a$$

Modellierungen

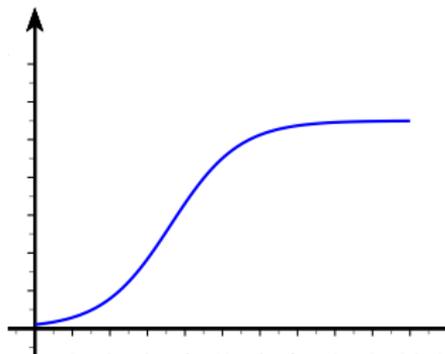
Übersicht

Wachstum

Eine Differentialgleichung

$$f'(t) = kf(t)(G - f(t))$$

$$f(0) = a$$



Modellierungen

SIR

Ansteckende Krankheiten

Gekoppeltes System von Differentialgleichungen

$$S'(t) = -i \cdot S(t) \cdot I(t)$$

$$I'(t) = i \cdot S(t) \cdot I(t) - g \cdot I(t)$$

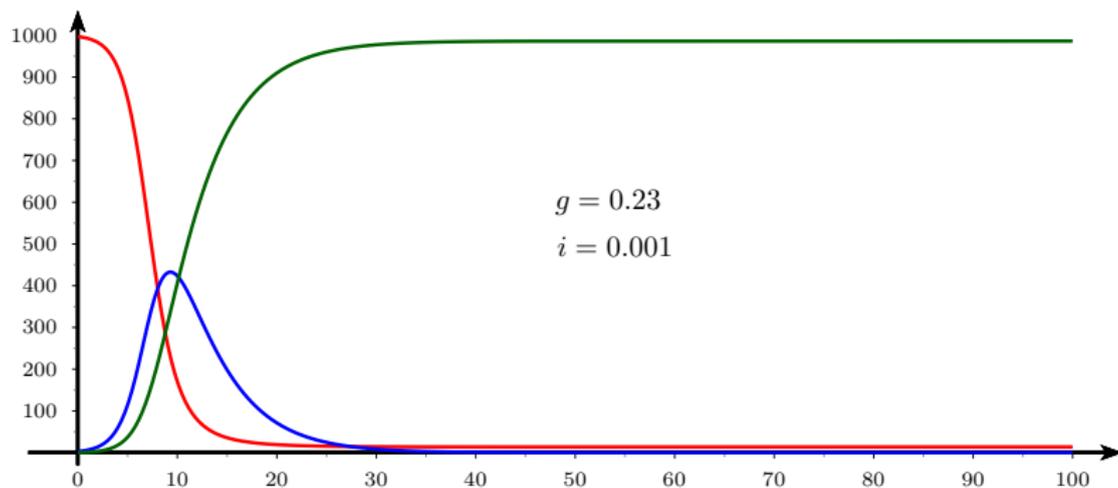
$$R'(t) = g \cdot I(t)$$

Modellierungen

SIR

Ansteckende Krankheiten

Gekoppeltes System von Differentialgleichungen



Modellierungen

Räuber-Beute Modell

Lotka-Volterra

System gekoppelter
Differentialgleichungen

$$\dot{B} = G_B \cdot B - S_B \cdot B \cdot R$$

$$\dot{R} = G_R \cdot B \cdot R - S_R \cdot R$$

Modellierungen

Räuber-Beute Modell

Lotka-Volterra

System gekoppelter
Differentialgleichungen

$$\dot{B} = G_B \cdot B - S_B \cdot B \cdot R$$

$$\dot{R} = G_R \cdot B \cdot R - S_R \cdot R$$

Gesucht: Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$$

Modellierungen

Räuber-Beute Modell

Lotka-Volterra

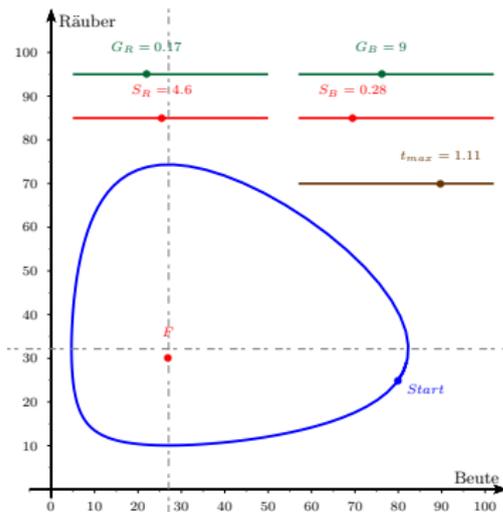
System gekoppelter
Differentialgleichungen

$$\dot{B} = G_B \cdot B - S_B \cdot B \cdot R$$

$$\dot{R} = G_R \cdot B \cdot R - S_R \cdot R$$

Gesucht: Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$$



Modellierungen

Himmelsmechanik

Das Keplerproblem

System gekoppelter
Differentialgleichungen

$$\ddot{\vec{x}} = -G \frac{M}{|\vec{x}|^3} \vec{x}$$

Wähle geeignete Einheiten:

- 1 SM = $1.9889 \cdot 10^{30}$ kg
- 1 AE = 149 597 870 700 m
- 1 M = 2629800 s

Univ. Gravitationskonstante:

$$G = 0.2742 \frac{\text{AE}^3}{\text{SM} \cdot \text{M}^2}$$

Geschwindigkeit der Erde um die
Sonne: $v \approx 0.527$ AE/M.

Modellierungen

Himmelsmechanik

Das Keplerproblem

System gekoppelter
Differentialgleichungen

$$\ddot{\vec{x}} = -G \frac{M}{|\vec{x}|^3} \vec{x}$$

Wähle geeignete Einheiten:

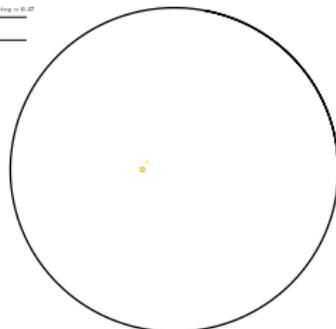
$$\begin{aligned} 1 \text{ SM} &= 1.9889 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\ 1 \text{ AE} &= 149\,597\,870\,700 \text{ m} \\ 1 \text{ M} &= 2629800 \text{ s} \end{aligned}$$

Univ. Gravitationskonstante:

$$G = 0.2742 \frac{\text{AE}^3}{\text{SM} \cdot \text{M}^2}$$

Geschwindigkeit der Erde um die
Sonne: $v \approx 0.527 \text{ AE/M}$.

Quadrat = 1
Blau-Punkt = 0.07
Punkt = 11.3



Modellierungen

Hands-on

Realisierungen und Optimierungen

- ▶ Modell auswählen (ev. eigenes, z.B. gekoppelte Oszillatoren, 3-Körperproblem, ...)
- ▶ Realisierung mit GeoGebra
- ▶ Optimierung bzw. Weiterentwicklung

Modellierungen

Hands-on

Realisierungen und Optimierungen

- ▶ Modell auswählen (ev. eigenes, z.B. gekoppelte Oszillatoren, 3-Körperproblem, ...)
- ▶ Realisierung mit GeoGebra
- ▶ Optimierung bzw. Weiterentwicklung

Modellierungen

Hands-on

Realisierungen und Optimierungen

- ▶ Modell auswählen (ev. eigenes, z.B. gekoppelte Oszillatoren, 3-Körperproblem, ...)
- ▶ Realisierung mit GeoGebra
- ▶ Optimierung bzw. Weiterentwicklung