Modellierungen dynamischer Systeme

29. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

In GeoGebra ist ein numerisches Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung eingebaut. Um technische Fragen wie Euler-Verfahren versus Runge-Kutte-Verfahren n-ter Ordnung beziehungsweise geeignete Wahl der Schrittweite muss man sich nicht kümmern.
An konkreten Beispielen wird gezeigt, wie man GeoGebra numerische Lösungen von Differentialgleichungen berechnen lässt und die Ergebisse graphisch darstellen kann.

2 Wachstum

- Modell des exponentiellen Wachstums: Das Wachstum (momentane Zunahme einer Population) ist proportional zur momentanen Population. Die Proportionalitäts- oder Wachstumskonstante sei k. Die Differentialgleichung lautet dann:

  $$f'(t) = k \cdot f(t) \quad \text{mit } f(0) = a$$

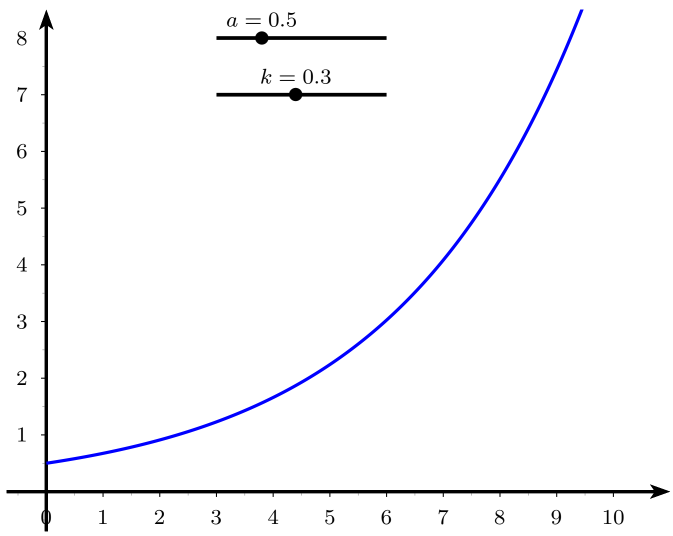
  Die Lösung dieser Gleichung – die Exponentialfunktion – erscheint auch im Lehrplan der BMS.

  $$f(t) = ae^{k \cdot t}$$

  Die numerische Lösung mit GeoGebra findet man mittels folgender Befehle:

`Tmin = 0`	Start der Integration
`Tmax = 10`	Ende der Integration
`a`	Schieberegler für Anfangswert anlegen
`k`	Schieberegler für Wachstumsrate anlegen
`f'(t,f)= k f`	Eingabe der Differentialgleichung
`NLöseDgl({f'},Tmin,{a},Tmax)`	Befehl zur numerischen Integration

  Das Ergebnis ist ein GeoGebra-Objekt mit dem Namen `NumerischesIntegral1` und der Graph der numerischen Lösung:



Man kann aus dem Objekt `NumerischesIntegral1` weitere Grössen auslesen:

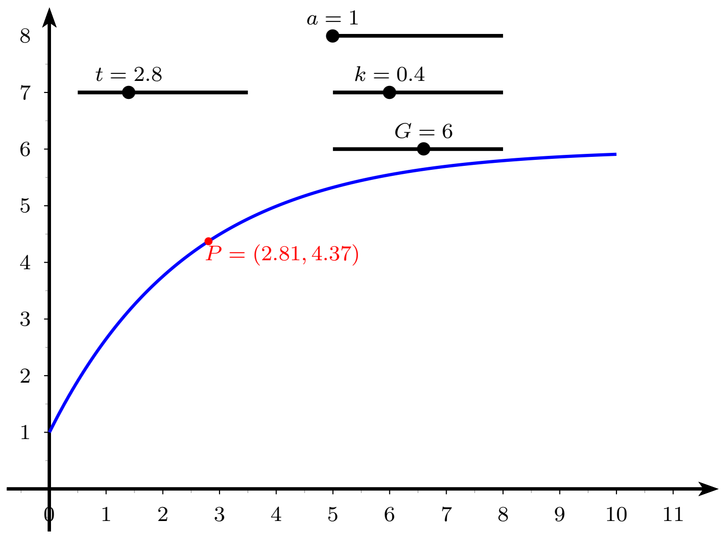
`NSchritte = Länge(NumerischesIntegral1)`	In diesem Beispiel liefert GeoGebra `NSchritte = 1002`. Das heisst, es wurden **nebst** dem Startwert 1002 Werte berechnet.
`t=Schieberegler(Tmin, Tmax, (Tmax-Tmin)/NSchritte, 0, 200, False, True, False, True)`	Legt einen Schiebregler an.
`P=Punkt(NumerischesIntegral1, (t-Tmin)/(Tmax-Tmin))`	Ein Punkt `P` auf dem Graphen der integrierten Funktion in Abhängigkeit der Zeit `t` wird angezeigt. Man beachte, dass das zweite Argument von `Punkt` eine Zahl zwischen 0 und 1 ist.

- Modell des beschränkten Wachstums: Das Wachstum (momentane Zunahme einer Population) ist proportional zur vorhandenen Kapazität (Kapazitätsgrenze = G).

$$f'(t) = k \cdot (G - f(t))$$

`Tmin = 0`	Start der Integration
`Tmax = 10`	Ende der Integration
`a`	Schieberegler für Anfangswert anlegen
`k`	Schieberegler für Wachstumsrate anlegen
`G`	Schieberegler für Kapazitätsgrenze anlegen
`f'(t,f)= k (G - f)`	Eingabe der Differentialgleichung
`NLöseDgl({f'},Tmin,{a},Tmax)`	Befehl zur numerischen Integration

Der Graph der gesuchten Funktion sieht nun so aus:



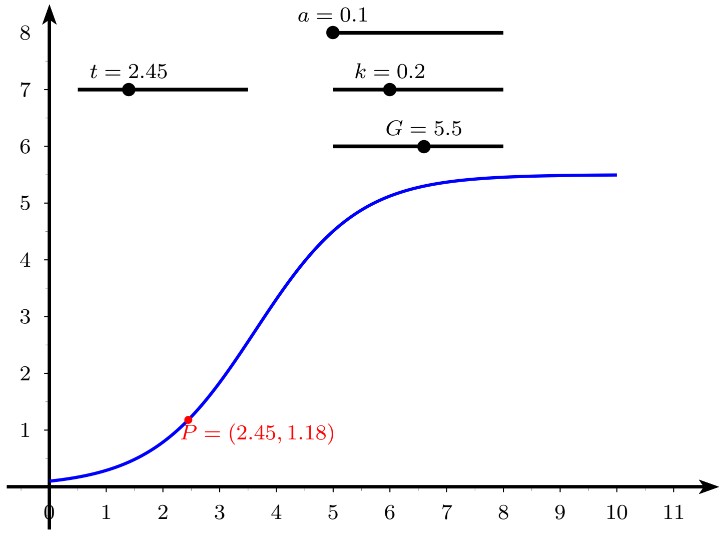
- Modell des logistischen Wachstums: Das Wachstum (momentane Zunahme einer Population) ist proportional zur aktuellen Population und zur noch vorhandenen Kapazität (Kapazitätsgrenze = G).

$$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (G - f(t))$$

Das System löst sich wie oben, man muss nur Eingabe der Differentialgleichung anpassen

`f'(t,f)= k f (G - f)`	Eingabe der Differentialgleichung

und erhält folgende graphische Darstellung:

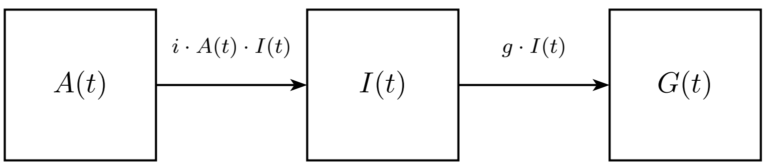


3 SIR-Modell

Es handelt sich hier um ein "einfaches" Modell für die Ausbreitung von Infektionskrankheiten. Dieses Beispiel hat durch die Pandemie jüngst an Bekanntheit gewonnen. Auch wenn Differentialgleichungen im Lehrplan der BMS nicht direkt vorkommen, eignet sich ein GeoGebra-Applet zu diesem Modell, um verschiedene Aspekte von Funktionen im Mathematikunterricht zu thematisieren. Das Beispiel wird durch ein System gekoppelter Differentialgleichungen 1. Ordnung beschrieben.
Wir gehen davon aus, dass eine Person, die einmal die Krankheit durchmachte, anschliessend nicht noch einmal daran erkranken kann. Wir teilen die gesamte Gesellschaft in drei Gruppen auf. Jede Person gehört genau einer der Gruppen an:

- $A(t)$ bezeichnet die Anzahl Personen, die noch ansteckbar sind, die also noch nicht aber irgend später einmal erkranken könnten.
- $I(t)$ bezeichnet die infizierten Personen.
- $G(t)$ bezeichnet die Personen, die genesen (oder gestorben) sind und somit nicht noch einmal erkranken können.

Die Summe der drei Funktionen $I(t) + G(t) + A(t) = N$ ist die Gesamtanzahl aller Personen in dieser Gesellschaft, also z.B. alle Personen, die in der Schweiz wohnhaft sind. Durch die Verbreitung der Krankheit verändern sich diese drei Funktionen mit der Zeit. Zur Zeit $t = 0$ des Ausbruchs der Krankheit ist $I(0) = 1$ (eine einzige Person ist infiziert), $G(0) = 0$ (keine Person ist genesen) und $A(t) = N - 1$ (alle bis auf eine Person können noch krank werden). Schematisch kann man unser Modell so darstellen:



Im angelsächsischen Sprachraum nennt man die drei Grössen **S**usceptible, **I**nfected und **R**ecovered und man nennt solch ein Modell einer Epidemie ein SIR-Modell. Wieder sollen $I'(t)$, $G'(t)$ und $A'(t)$ die Änderung der entsprechenden Funktionen gegenüber dem Vortag bezeichnen. In obigem Schema ist über den Pfeilen angedeutet, wie von Tag zu Tag Personen von einer Gruppe zur nächsten "wandern":

- Die Anzahl ansteckbarer Personen nimmt ab, d.h. ansteckbare Personen werden infiziert. Und zwar können umso mehr Personen infiziert werden, als es noch ansteckbare Personen hat und umso mehr als es bereits infizierte Personen hat. Mit einer Formel kann man das folgendermassen beschreiben:
$$A'(t) = -i \cdot A(t) \cdot I(t)$$
Hier ist i die Infektionsrate. Je grösser i ist, desto mehr Personen werden pro Tag neu infiziert.

- Die Änderung der genesenen Personen ist umso grösser, je mehr es infizierte Personen hat. Die "Abwanderung" der infizierten Personen in den Pool der genesenen Personen soll durch folgende Formel beschrieben werden:
$$G'(t) = g \cdot I(t)$$
Hier ist g die Genesungsrate. Je grösser g ist, desto mehr infizierte Patienten werden pro Tag wieder gesund. Die Genesungsrate hängt von einem durchschnittlichen Krankheitsverlauf ab. Die Genesungsrate hängt also von der Krankheit ab.

- Die Änderung der infizierten Personen ist nun ein Zu- und Abfluss der ansteckbaren und genesenen Personen. Als Formel:
$$I'(t) = i \cdot A(t) \cdot I(t) - g \cdot I(t)$$

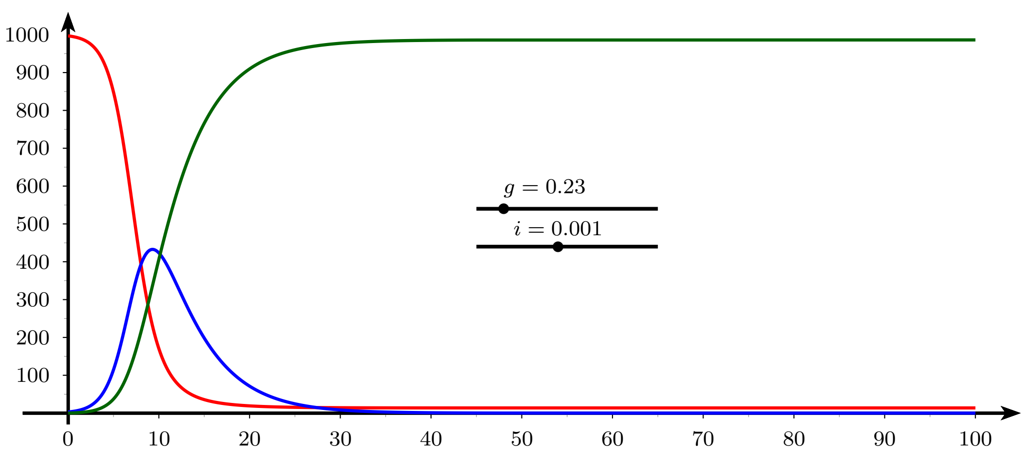
`Tmax = 100`	Ende der Integration
`i`	Schieberegler für Infektionsrate anlegen (min=0, max=0.002, Schrittweite=0.0001)
`g`	Schieberegler für Genesungsrate anlegen (min=0, max=0.5, Schrittweite=0.01)

`S'(t,S,I,R) = -i S I`
`I'(t,S,I,R) = i S I - g I`
`R'(t,S,I,R) = g I`
	Eingabe der Differentialgleichungen

`Sstart = 997`
`Istart = 3`
`Rstart = 0`
	Anfangswert der ansteckbaren Personen
	Anfangswert der infizierten Personen
	Anfangswert der genesenen Personen

`NLöseDgl({S',I',R'},0,{Sstart,Istart, Rstart}, Tmax)`	Befehl zur numerischen Integration

`NumerischesIntegral1` kann sinnvollerweise in `NumS`, `NumerischesIntegral2` in `NumI` und `NumerischesIntegral3` in `NumR` umbenannt werden.

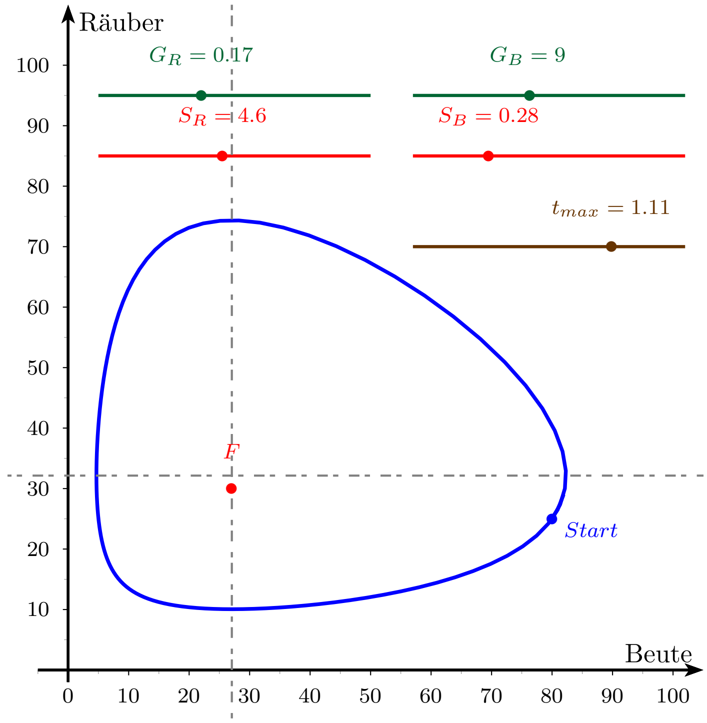


4 Das Räuber-Beute Modell nach Lotka-Volterra

In einem abgeschlossenen System lebt eine Räuber- und eine Beutepopulation. Man möchte die Anzahl Räuber und Beutetiere modellieren unter den folgenden Annahmen: Die Änderungsrate der Zahl der Beutetiere ist proportional zur Anzahl der Beutetiere und nimmt proportional zur Kontakthäufigkeit ab.
Mathematisch formuliert ergeben sich folgende gekoppelte Differentialgleichungen, die auch als Lotka-Volterra-Gleichungen bekannt sind:

$$\begin{aligned}\dot{B} &= G_B \cdot B - S_B \cdot B \cdot R \\ \dot{R} &= G_R \cdot B \cdot R - S_R \cdot R\end{aligned}$$

In diesem Beispiel möchte man $(B(t), R(t))$ als Parameterdarstellung einer Kurve zeichnen:



`Start`	Setze mit dem Werkzeug Punkt einen Startpunkt der zu berechnenden Parameterkurve
`Tmax`	Schieberegler für den Endzeitpunkt der Integration
`G_B`	Schieberegler für Geburtsrate der Beute
`S_B`	Schieberegler für Sterberate der Beute
`G_R`	Schieberegler für Geburtsrate der Räuber
`G_R`	Schieberegler für Sterberate der Räuber
`B'(t,R,B) = G_B B - S_B R B` `R'(t,R,B) = G_R R B - S_R R`	Differentialgleichungen
`B_0=x(Start)` `R_0=y(Start)`	Startwerte
`NLöseDgl({R',B'},0, {R_0, B_0}, Tmax)`	Befehl zur numerischen Integration
`N=Länge(NumerischesIntegral1)`	Anzahl Integrationsschritte
`rnum=Folge(y(Punkt(NumerischesIntegral1, k / N)), k, 0, N)`	numerische Werte für $R(t)$
`bnum=Folge(y(Punkt(NumerischesIntegral2, k / N)), k, 0, N)`	numerische Werte für $B(t)$
`Bahn=Polygonzug((bnum, rnum))`	Darstellung der Kurve

5 Das Keplerproblem

Die Bewegungsgleichungen eines Körpers im Schwerefeld eines Zentralgestirns mit Masse M lauten:

$$\ddot{\vec{x}} = -G\frac{M}{|\vec{x}|^3}\vec{x}$$

Hier ist $G = 6.674 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$ die universelle Gravitationskonstante und M die Masse des Zentralgestirns. Wir möchten nicht in SI-Einheiten sondern in Sonnenmassen und Astronomischen Einheiten und Monat rechnen:

$$\begin{aligned} 1\ \mathrm{SM} &= 1.9889 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \\ 1\ \mathrm{AE} &= 149\,597\,870\,700\ \mathrm{m} \\ 1\ \mathrm{M} &= 2629800\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

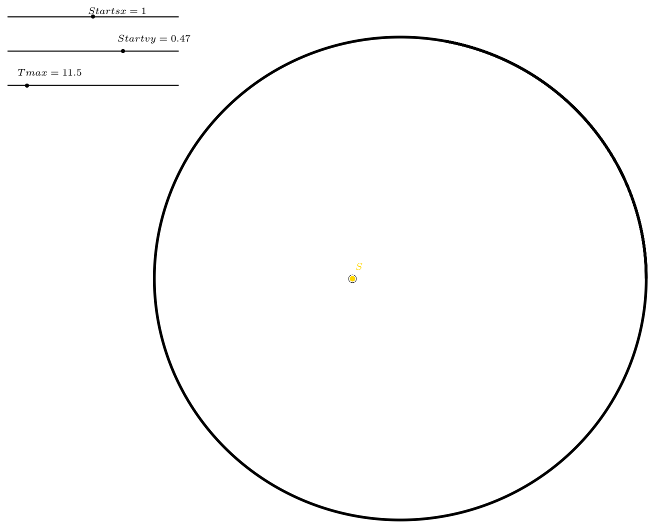
In diesen Einheiten ist die universelle Gravitationskonstante:

$$G = 0.2742\,\frac{\mathrm{AE}^3}{\mathrm{SM}\cdot\mathrm{M}^2}$$

Die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne ist etwa $v = 30\,000$ m/s. Das sind rund 0.527 AE/M.

`Tmin = 0`	Start der Integration
`Tmax = 12`	Ende der Integration
`M=1`	Parameter festlegen
`G=0.2742`	
`sx'(t,sx,sy,vx,vy)= vx`	Eingabe der Differentialgleichung
`sy'(t,sx,sy,vx,vy)= vy`	
`vx'(t,sx,sy,vx,vy)= - G M sx / (sx^2+sy^2)^1.5`	
`vy'(t,sx,sy,vx,vy)= - G M sy / (sx^2+sy^2)^1.5`	
`Startsx=1`	Anfangsbedingungen
`Startsy=0`	
`Startvx=0`	
`Startvy=0.527`	
`NLöseDgl({sx', sy', vx', vy'}, Tmin, {Startsx, Startsy, Startvx, Startvy}, Tmax)`	Befehl zur numerischen Integration
`AnzInt=Länge(NumerischesIntegral1)`	Anzahl Integrationsschritte
`xnum=Folge(y(Punkt(NumerischesIntegral1, k / AnzInt)), k, 0, AnzInt)`	x-Werte der Integration
`ynum=Folge(y(Punkt(NumerischesIntegral2, k / AnzInt)), k, 0, AnzInt)`	y-Werte der Integration
`Bahn=Polygonzug((xnum, ynum))`	Bahnkurve zeichnen

Die gewählten Parameter beschreiben hier die Bahn der Erde um die Sonne. Was passiert, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit ändert? Wie könnte man die Halbachsen bestimmen?



6 Gedämpfte Schwingung

Wir wollen folgendes System von Differentialgleichungen lösen. Es handelt sich dabei um eine gedämpfe harmonische Schwingung.

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= v(t) \\ m\dot{v}(t) &= -ks(t) - bv(t) \end{aligned}$$

m steht für Masse, k steht für Federkonstante und b ist eine Viskosität der geschwindigkeitsabhängigen Reibung.
Für $m = 0.1$, $k = 1.2$ und $b = 0.1$ erhält man folgende Lösung: