Eigene und ausgewählte vordefinierte GeoGebra-Werkzeuge

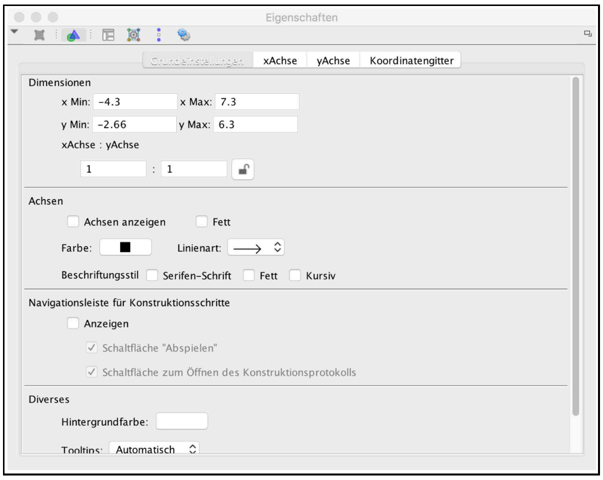
29. Oktober 2022

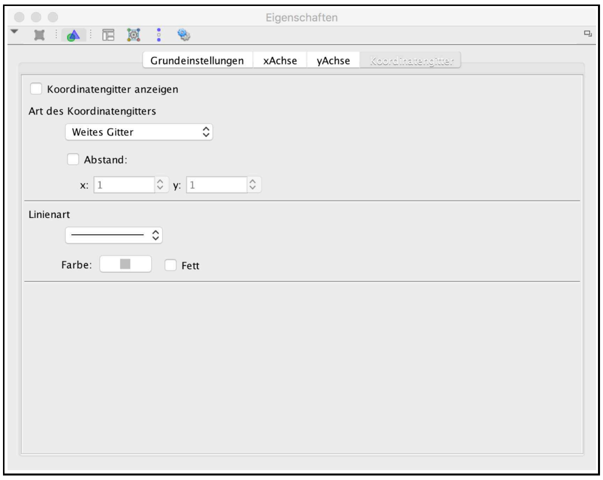
Inhaltsverzeichnis

1 Einstellungen in GeoGebra

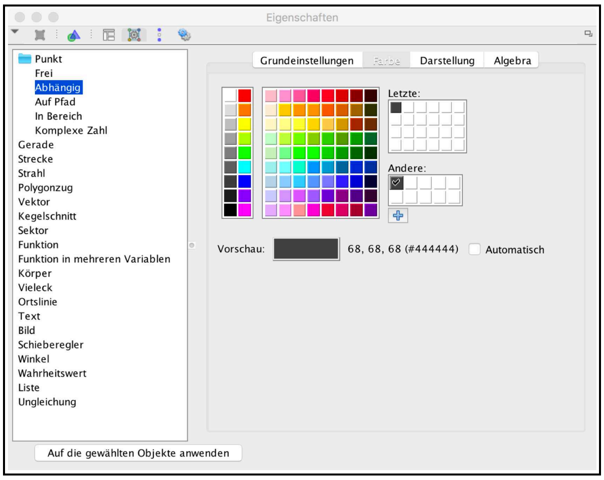
GeoGebra ist ein sehr mächtiges Werkzeug, das sich in verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik einsetzen lässt (Geometrie, Analysis, Algebra, Stochastik).
Wenn man mit GeoGebra ,,Analysis" betreibt, sind natürlich die Darstellung der Koordinatenachsen erwünscht, wird lediglich ,,ebene Geometrie" betrieben, macht es hingegen Sinn, die Koordinatenachsen auszublenden:

- Koordinatenachsen und -gitter: Diese brauchen wir in den meisten Aufgaben der "Ebenen Geometrie" nicht. Unter dem Menüpunkt "Einstellungen → Erweitert ..." kann man die entsprechenden Häckchen deaktivieren.





- Man kann hier auch die Voreinstellungen von neuen Objekten festlegen, z.B. dass ein neuer abhängiger Punkt mit einer grauen Farbe erscheinen soll (siehe Abbildung).



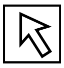
- In den Einstellungen lässt sich auch festlegen, welche Schriftgrösse man bevorzugt, in welcher Sprache die Menüpunkte erscheinen sollen, usw.

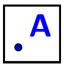
- Schliesse die Eintsellung ab, indem du "Einstellungen → Einstellungen speichern" wählst.

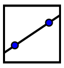
1.1 Bestehende und eigene Werkzeuge

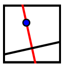
GeoGebra stellt ein ganze Palette bereits vorprogrammierter Werkzeuge zur Verfügung. Diese Werkzeuge werden in Gruppen in der Werkzeugleiste dargestellt. Tatsächlich kann man auch eigene Werkzeuge programmieren und mit in die Werkzeugleite aufnehmen (siehe weiter unten).

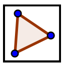
Die vordefinierten Werkzeug-Gruppen sind:

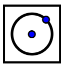
 Bewegen und auswählen

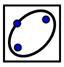
 Punkte

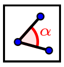
 Geraden, Strecken und Vektoren

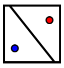
 Spezielle Geraden wie Tangente, Orthogonale, Parallele, Mittelsenkrechte

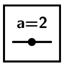
 Vielecke

 Kreise, Kreisbogen, Kreissektor

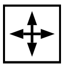
 Kegelschnitte

 Winkel, Abstände, Steigungen

 Spiegelung, Translation und zentrische Streckung



Eingabetools (Schieberegler, Kontrollkästchen, . . .)

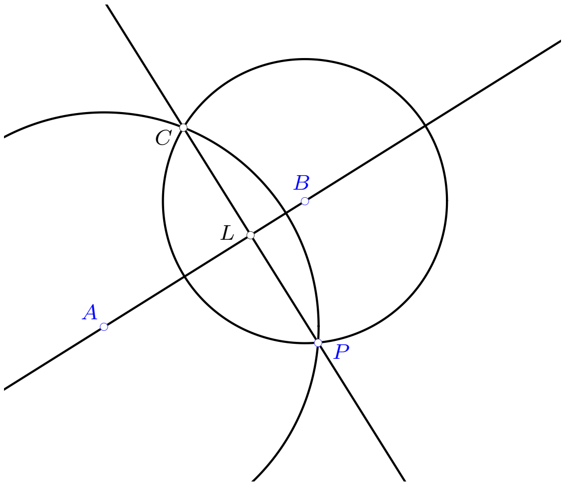
 Anpassungen der graphischen Darstellung

Möchte man die SuS eine geometrische Konstruktion durchführen lassen, bei der sie wie die griechischen Geometer in asketischer Selbstbeschränkung nur Zirkel und Lineal benützen sollen, kann man ein GeoGebra-Dokument zur Verfügung stellen, in dem nur Zirkel und Lineal als Werkzeuge zur Verfügung stehen. Dazu passen wir die Werkzeugleiste entsprechend an. Wähle den Menüpunkt "Werkzeuge → Werkzeugleiste anpassen . . . " und entferne alle Werkzeuge ausser: Bewege, Punkt, Punkt auf Objekt, Schneide, Gerade, Strecke, Strahl, Vieleck, Kreis mit Mittelpunkt durch Punkt, Winkel, Verschiebe Grafik-Ansicht, Vergrössere und Verkleinere. Klicken anschliessend auf "Übernehmen" und dann auf "Schliessen".

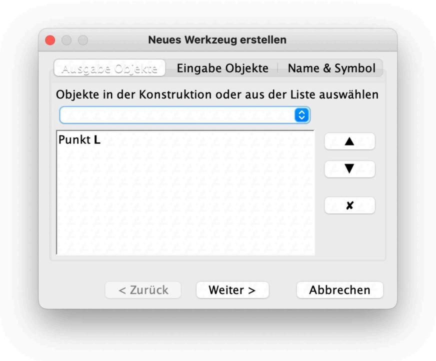
2 Eigene Werkzeuge in GeoGebra erstellen

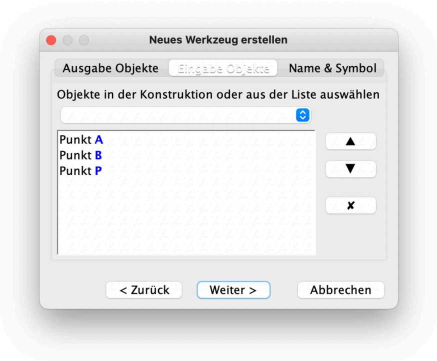
2.1 Eigenes Werkzeug "Lotpunkt auf"

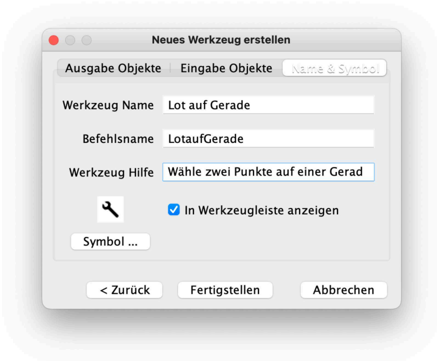
Gegeben sei eine Gerade durch A und B und ein Punkt P, der nicht auf der Geraden AB liegt. Gesucht ist der Lotpunkt von P auf der Geraden AB. Um ein eigenes Werkzeug zu erstellen, machen wir die entsprechende Konstruktion zuerst von Hand mit den vorhandenen Werkzeugen. Nach eine Umbenennung der Punkte sieht die Situation wie unten aus. Es wurde je ein Kreis mit Mittelpunkt in A bzw. in B durch P gezeichnet. Durch P und den zweiten Schnittpunkt C der beiden Kreise wird eine Gerade gelegt, welche die Gerade AB in L schneidet.



Unter dem Menüpunkt Werkzeuge klicke man auf Neues Werkzeug erstellen .... Man wählt aus der Auswahlliste die auszugebende Objekte an (hier also den Punkt L, denkbar wäre, dass man immer auch die Lotgerade ausgeben lassen möchte). Anschliessend klickt man auf Weiter, wählt die Eingabeobjekte an (hier die Punkte A, B und P), wieder Weiter klicken und dem neuen Werkzeug einen Namen geben. Der Befehlsname kann später in der Eingabezeile verwendet werden. Unter Werkzeug Hilfe kann man einen Hinweis zur Bedienung des Werkzeugs hinterlegen. Hier zum Beispiel, dass man zuerst die Punkte auf der Geraden und dann den Punkt ausserhalb der Geraden anwählen muss. Die Reihenfolge wird im Fenster Eingabe Objekte festgelegt.







Nach Erstellung eines Werkzeugs kann man alle man im Algebra-Fester alle Objekte löschen. Das neue Werkzeug steht jetzt zur Verfügung. Die Konstruktionselemente (hier Kreise und Lotgerade) bleiben verborgen.

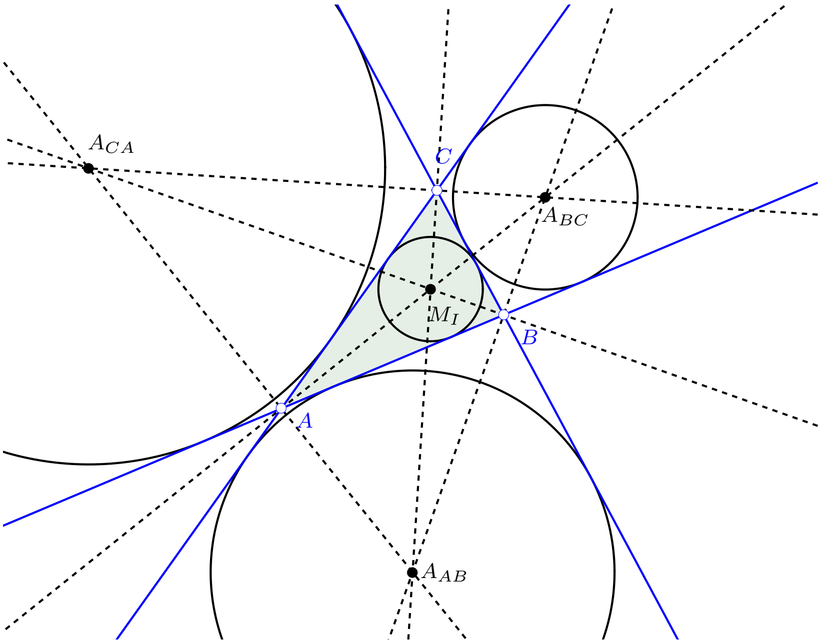
Unter Werkzeuge verwalten, kann man ein Werkzeug für spätere Anwendungen speichern. Wähle Speichern unter, es entsteht eine ggt-Datei.

Kleine Übung: Erstelle mit Hilfe dem Werkzeug Lot auf Gerade ein neues Werkzeug, welches den Höhenschnittpunkt eines beliebigen Dreiecks konstruiert.

2.2 In- und Ankreise eines beliebigen Dreiecks

In GeoGebra ist das Werkzeug Umkreis bereits definiert, für den Inkreis gibt es aber kein entsprechendes Werkzeug. Wir erstellen ein Werkzeug, das den Inkreismittelpunkt und die Berührungspunkte zu den drei Eckpunkten eines Dreiecks zeichnet.

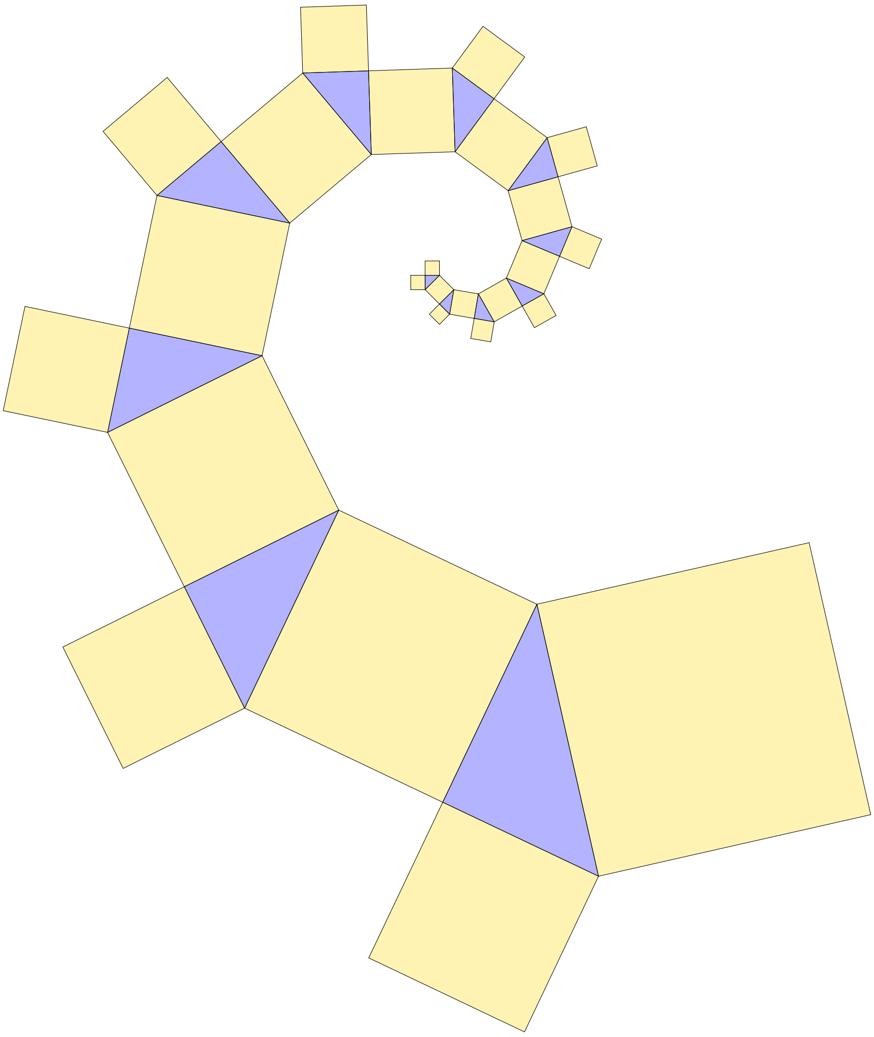
Mit dem Werkzeug “Gerade” zeichne man drei Geraden die paarweise durch die Punkte A, B und C gehen und anschliessend mit dem Werkzeug Winkelhalbierende zu jedem Geradenpaar die beiden Winkelhalbierenden. Wir können nun das früher selbst erstellte Werkzeug LotaufGerade einsetzen, um die Berührungspunkte des In- und der Ankreise an die Geraden AB, BC und CA zu zeichnen.



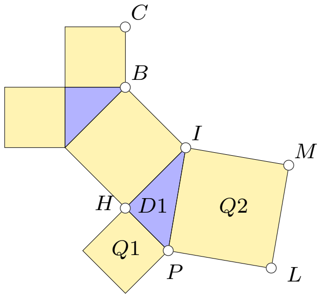
Kleine Übung: Erstelle ein Werkzeug, welches lediglich die Mittelpunkte von Inkreis und Ankreise ausgibt. Für die Berührungspunkte dieser Kreise an die Geraden haben wir bereits das Werkzeug LotaufGerade.

2.3 Pythagoras trifft Fibonacci

Die folgende Abbildung zeigt eine Spirale mit blauen rechtwinkligen Dreiecken. Das kleinste blaue Dreieck ist gleichschenklig, die Katheten haben die Seitenlänge 1 Einheit. Damit ist die Fläche des Hypothenusenquadrats 2. Es wird nun eine Spirale mit rechtwinkligen Dreicken erzeugt, indem immer das grössere der Kathetenquadrate der vorangegangenen Generation angehängt wird. Die Flächen der Hypothenusenquadrate bilden eine Fibonacci-Folge beginnend mit $2, 3, 5, 8 \ldots$.



Um solch eine Figur mit wenigen Klicks in GeoGebra zu erstellen brauchen wir ein Werkzeug, welches ausgehend von einer Generation die folgende Generation erstellt. Man betrachte dazu folgende Abbildung der ersten Generationen der Spirale:

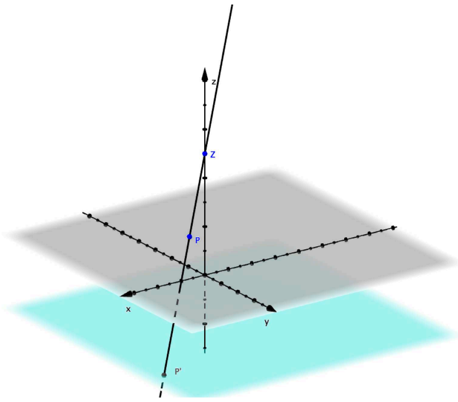


Ausgehend von den Punkten C, B, I und H "konstruieren" wir den Punkt P, das Dreieck $D1$ und die beiden Quadrate $Q1$ und $Q2$.

Eingabezeile: `P = H + Abstand(B,C) (I-B)/Abstand(I,B)`
Mit dem Werkzeug Regelmässiges Vieleck konstruiert man die Quadrate $Q1$ und $Q2$ und mit Vieleck das Dreieck $D1$. Beim Anlegen des neuen Werkzeugs achte man auf die Reihenfolge der Eingabepunkte C, B, I und H. Das Werkzeug soll lediglich das Dreieck $D1$, die Vierecke $Q1$ und $Q2$ und die Punkte M und L ausgeben.

2.4 Zentralprojektion eines 3D-Körpers

In GeoGebra gibt es etwa seit Version 4 eine 3D-Ansicht, allerdings sind die Abbildungen in einer Parallelprojektion und der Export als LaTeX-Dokument ist nur für 2D-Abbildungen möglich. Wir erstellen ein Werkzeug, welches einen Punkt P in einer Zenralprojektion auf den Punkt P' abbildet.



Dabei liegt der Punkt Z nicht wie in obiger Abbildung auf der z-Achse. Die Projektionsebene E sei parallel zur xy-Ebene und liegt d Einheiten unter der xy-Ebene. Die Koordinaten des Punktes P' ergeben sich dann aus:

$$P' = \left(x_Z - (d + z_Z) \cdot \frac{x_P - x_Z}{z_P - z_Z}, y_Z - (d + z_Z) \cdot \frac{y_P - y_Z}{z_P - z_Z}, 0\right)$$

Um das Werkzeug Zentralprojektion anzulegen, geht man also wie folgt vor:

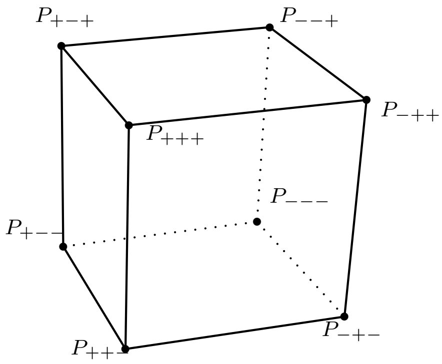
`P = (1,1,2)`	Einen beliebigen Punkt P festlegen
`Z = (-1,-1,12)`	Einen beliebigen Punkt Z festlegen
`d = 6`	Parameter d der Projektionsebene
`Pp=(x(Z)-(d+z(Z)) (x(P) - x(Z))/(z(P)-z(Z)),y(Z)-(d+z(Z)) (y(P) - y(Z))/(z(P)-z(Z)))`	P ist also ein Punkt in $\mathbb{R}^2$

Jetzt kann man ein entsprechendes Werkzeug Zentralprojektion erstellen. Man achte auf die Reihenfolge der Argumente: P, Z, d.
Um einen gezeichneten Körper rotieren zu können, erstelle man für drei Winkel α, β und γ einen Schieberegler und definiere Rotationsmatrizen gemäss:
`Rota = {{cos(α),-sin(α),0}, {sin(α), cos(α),0}, {0,0,1}}`
`Rotb = {{1,0,0}, {0,cos(β),-sin(β)}, {0,sin(β), cos(β)}}`
`Rotc = {{cos(γ),-sin(γ),0}, {sin(γ), cos(γ),0}, {0,0,1}}`
und
`Rot = Rota Rotb Rotc`
Die 8 Eckpunkte eines Würfels kann man mit den so festgelegten Werkzeugen in der Ebene zeichnen lassen.

```
P_{---} = Zentralprojektion(Rot (-1,-1,-1),Z,d)
P_{+--} = Zentralprojektion(Rot (1,-1,-1),Z,d)
P_{-+-} = Zentralprojektion(Rot (-1,1,-1),Z,d)
```

```
P_{++-} = Zentralprojektion(Rot (1,1,-1),Z,d)
P_{--+} = Zentralprojektion(Rot (-1,-1,1),Z,d)
P_{+-+} = Zentralprojektion(Rot (1,-1,1),Z,d)
P_{-++} = Zentralprojektion(Rot (-1,1,1),Z,d)
P_{+++} = Zentralprojektion(Rot (1,1,1),Z,d)
```

Für die Winkel $\alpha = 180°$, $\beta = 62°$ und $\gamma = 16°$ erhält man folgende Figur:



3 Weitere Werkzeuge

3.1 Das Werkzeug `Folge`

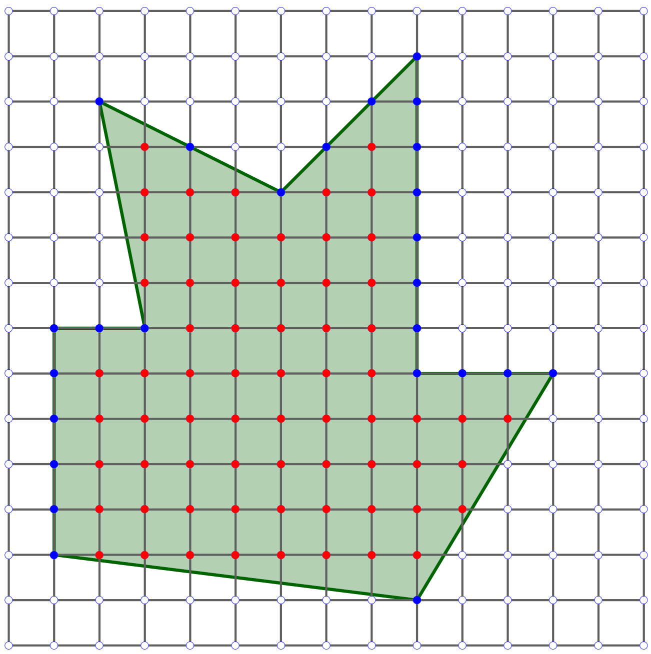
Das Werkzeug `Folge` ist in Kombination mit einem ganzzahligen Schieberegler ein sehr hilfreiches Instrument.

3.1.1 Das Geo-Brett

Der Satz von Pick besagt, dass sich die Fläche eines Gitterpolygons (ohne "Löcher") aus

$$A = I + \frac{R}{2} - 1$$

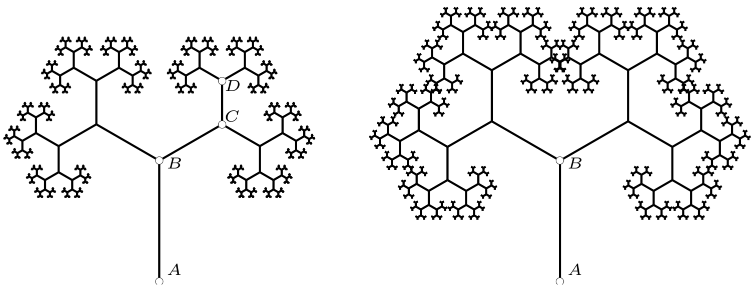
berechnen lässt, wobei I die Gitterpunkte im Innern und R die Gitterpunkte auf dem Rand sind.



Die horizontalen und vertikalen Linien erhält man mit:
`horizontal = Folge(Strecke((0, k), (n, k)), k, 0, n)`
`vertikal = Folge(Strecke((k, 0), (k, n)), k, 0, n)`
und für die Gitterpunkte:
`Pkte = Folge(Folge((l, m), l, 0, n), m, 0, n)`
wobei hier mit dem Schieberegler $n = 14$ gewählt wurde.

3.1.2 Zahlenfolgen in geometrischen Figuren

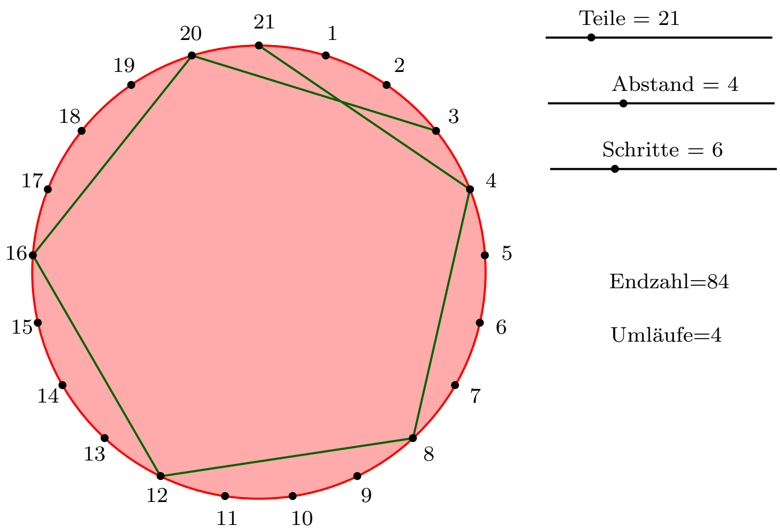
Etwas anspruchsvoller ist der folgende binäre Baum. Die Länge der Äste wird von Generation zu Genaration mit dem Faktor q gestreckt. Die Winkel zwischen den Verzweigungen betragen jeweils 120°.
Links ist ein Baum mit $q = 0.6$ und rechts ein Baum mit $q = 0.65$ abgebildet.



Wie gross darf nun q maximal sein, damit sich die Äste des Baums nicht überschneiden.

3.1.3 Die Zahlenscheibe aus **mathematik**lehren

In der Ausgabe 203 von **mathematik**lehren findet man folgende Aufgabe:
Hier siehst du den Beginn eines Streckenzugs. Zur nächsten Ecke geht es immer mit einem zu wählenden "Abstand" aussen auf dem Kreis im Uhrzeigersinn weiter. Kommt am Ende ein Stern heraus? Erkunde die Zusammenhänge zwischen der Anzahl Zahlen auf dem Kreisrand (=Teile), dem Abstand zwischen Streckenanfang und -ende, der Anzahl Schritte, die es braucht, bis der Streckenzug sich schliesst und der Anzahl Umläufe des Streckenzugs.

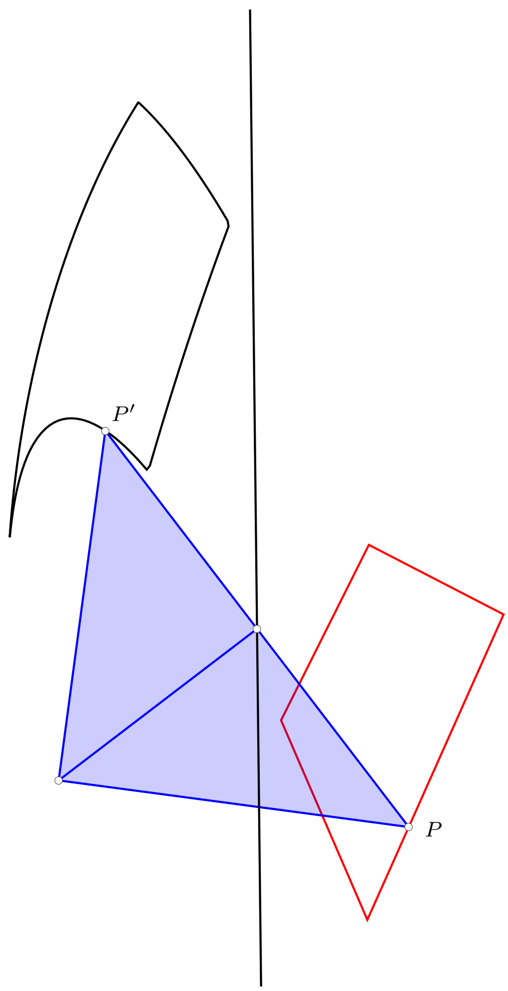


Ein Applet zu dieser Aufgabe lässt sich mit wenigen Schritten realisieren:

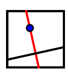
`M=(0,0)`	Kreismittelpunkt M
`r=4`	Kreisradius r
`k=Kreis(M,r)`	Kreisscheibe. Unter Eigenschaften kann die Füllung und Färbung angepasst werden.
`Teile`	Schieberegler, ganze Zahlen, min=1, max=100, Anzahl Zahlen auf der Peripherie des Kreises
`Abstand`	Schieberegler, ganze Zahlen, min=1, max=`ceil(Teile/2)-1`
`ggt=GGT(Teile, Abstand)`	ggT von `Teile` und `Abstand`
`kgv=Teile Abstand / ggt`	kgV von `Teile` und `Abstand`
`Schritte`	Schieberegler, ganze Zahlen, min=1, max=kgv / Abstand
`strkzug = Folge(Strecke((r sin(2 Pi Mod((k - 1) Abstand, Teile) / Teile), r cos(2 Pi Mod((k - 1) Abstand, Teile) / Teile)), (r sin(2 Pi Mod(k Abstand, Teile) / Teile), r cos(2 Pi Mod(k Abstand, Teile) / Teile))), k, 1, Schritte)`	Zeichnet den Streckenzug
`delta = Wenn(Teile > 60, 5, 1)`	Wenn `Teile` grösser als 60 gewählt wird, wird nur jede fünfte Zahl beschriftet.
`Umlaeufe = kgv / Teile`	Berechnet die Anzahl Umläufe des Streckenzugs. Das sollen die Lernenden erforschen.
`beschriftung = Folge(Text(k delta, (1.1r sin(2 Pi k delta / Teile) - 0.1, 1.1 r cos(2 Pi k delta / Teile) - 0.1)), k, 1, floor(Teile / delta))`	Die Punkte auf der Peripherie werden ausserhalb des Kreises beschriftet.
`Text`	Mit dem Werkzeug `Text` wird die Endzahl und die Anzahl Umläufe angegeben. Unter Objekt kann man die Objekte auswählen, welche die entsprechenden Grössen berechnen.

3.2 Die Werkzeugw Punkt auf Objekt und Ortslinie

Auf Stufe Sek II kennen die Lernenden Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen. Diese Abbildungen sind geraden- und winkeltreu und werden vielleicht als Selbstverständlichkeit angesehen. Ein Beispiel einer Abbildung, welche diese Eigenschaften nicht hat, lässt sich leicht mit dem Geo-Dreieck realisieren. Folgende Figur illustriert die geometrische Abbildung.



Konstruktions-Skizze:

- Zeichne eine Figur (hier das blaue Viereck), welche abgebildet werden soll.
- Wähle Punkt auf Objekt und setze einen Punkt auf den Rand des Vielecks $\rightarrow P$.
- Lege die Länge der halben Hypotenuse des Geo-Deicks fest, z.B. `r=4`.
- Zeichne die vertikale "Abbildungsgerade" $\rightarrow g$.
- Zeichne einen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt in P.
- Schneide den Kreis mit der Geraden $g \rightarrow$ Schnittpunkt S.
- Spiegle den Punkt P an S.
- Zeichne das Geo-Dreieck.
- Zeichne die Bildfigur mit dem Werkzeug Ortslinie unter .

3.3 Das Werkzeug Kontrollkästchen

Im vorangegangenen Beispiel möchte man vielleicht zuerst einmal nur den Bildpunkt P' zeichnen und noch nicht die ganze Bildfigur. Wähle das Werkzeug Kontrollkästchen, klicke in die Zeichenebene, gib eine Beschriftung an, z.B. Bildfigur und wähle unter "Objekte in der Konstruktion oder aus der Liste auswählen" die oben gezeichnete Ortslinie aus.